Dérivées partielles et différentielle

Dérivées selon un vecteur

Dérivées partielles par rapport à une base de E

Soit $f : U \rightarrow F$ (où U est un ouvert de E avec E et F espaces vectoriels de dimension finie) et $a \in U$, elle est différentiable en a s'il existe une application linéaire (nécessairement unique) notée df_a telle que : $f(a+h) = f(a) + df_a(h) + o(h)$.

Application différentielle : $df : a \mapsto df_a(h)$ Notation $df_a.h$ Expression de la différentielle dans une base à l'aide des dérivées partielles : $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$

Matrice jacobienne

Gradient d'une application numérique définie sur un ouvert d'un espace euclidien : $df_a(h) = (\nabla f(a)|h)$ **Applications de classe $\mathcal{C}^1$** Une application f est de classe $\mathcal{C}^1$ si elle est différentiable et que sa différentielle df est continue.Une application est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si elle admet des dérivées partielles (par rapport à une base) continues.**Opérations sur les applications différentiables / de classe $\mathcal{C}^1$**

Combinaisons linéaires

Différentiabilité de $B(f, g)$ où f et g sont différentiables et B bilinéaire

Différentiabilité d'une composée de fonctions différentiables : règle de la chaîne. *On a traité en exemple des résolutions d'équations différentielles aux dérivées partielles d'ordre 1.*

Dérivée le long d'un arc

Théorème fondamental de l'analyse : Soit f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U connexe par arc et γ un arc de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans U ,

$$f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = \int_0^1 df_{\gamma(t)}(\gamma'(t))dt$$

Applications de classe $\mathcal{C}^k$

Définition

Théorème de Schwarz

Exemples d'équations différentielles aux dérivées partielles.

Opérations algébriques

Optimisation

Point critique

Si a est un extremum local alors a est un point critiqueHessienne d'une application de classe $\mathcal{C}^2$

Développement de Taylor - Young à l'ordre 2

Caractérisation des extremums à l'aide de la Hessienne ; étude des fonctions définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^2$.

Il est préférable de ne pas interroger sur les extremums en début de colle car cette thématique a été vue tardivement. Le programme de la semaine prochaine reprendra l'optimisation et l'optimisation sous contrainte en plus des groupes et de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$