

Calculatrices interdites.

Problème de Dirichlet

Si A est une partie d'un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{C}(A)$ le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des applications continues de A dans $\mathbb{C}$. Les notations D , $\bar{D}$ et T désignent respectivement

- le disque ouvert $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$
- le disque fermé $\bar{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$
- le cercle $T = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$.

À une fonction $f \in \mathcal{C}(T)$ quelconque on associe

- les coefficients de Fourier

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) e^{-int} dt \quad (\forall n \in \mathbb{Z})$$

- la fonction $g_f : D \rightarrow \mathbb{C}$ définie par la formule suivante, dont l'existence sera traitée dans la question 1) :

$$g_f(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \bar{z}^n$$

où $\bar{z}$ désigne le complexe conjugué de z ;

- la fonction $G_f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$G_f(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in T \\ g_f(z) & \text{si } z \in D \end{cases}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note p_n et q_n les fonctions de $\mathcal{C}(T)$ définies par

$$\begin{aligned} p_n(z) &= z^n \\ q_n(z) &= \bar{z}^n \end{aligned} \quad (\forall z \in T)$$

Soit X une partie non vide de $\mathbb{C}$ et f une fonction bornée sur X on note

$$\|f\|_{\infty, X} = \sup_{z \in X} |f(z)|$$

On **admet** le théorème de Weierstrass trigonométrique :

Théorème : Soit $\mathcal{P}(T)$ le sous espace vectoriel de $\mathcal{C}(T)$ engendré par $\{p_n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{q_n; n \in \mathbb{N}\}$. Toute fonction de $\mathcal{C}(T)$ est limite uniforme d'une suite d'éléments de $\mathcal{P}(T)$.

Le but du problème est de caractériser de différentes manières le prolongement G_f de f à $\bar{D}$.

A - Prolongement harmonique

Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$ on note $\tilde{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + iy \in U\}$. Pour toute fonction $u : U \rightarrow \mathbb{C}$, on note $\tilde{u} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par la formule $\tilde{u}(x, y) = u(x + iy)$. La fonction u est dite de classe $\mathcal{C}^2$ si $\tilde{u}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ au sens des fonctions de deux variables réelles. On note alors Δu la fonction définie sur U par

$$\Delta u(x + iy) = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2}(x, y)$$

Dans cette partie, on fixe une fonction $f \in \mathcal{C}(T)$ et on se propose de montrer que G_f est l'unique fonction $G : \bar{D} \rightarrow \mathbb{C}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- (a1) la restriction de G à T coïncide avec f ;
- (a2) G est continue sur $\bar{D}$;
- (a3) la restriction G à D est de classe $\mathcal{C}^2$ et $\Delta G(z) = 0$ pour tout $z \in D$.

On va d'abord montrer que G_f vérifie ces conditions. La condition (a1) est évidemment vérifiée.

- 1) a) Justifier que la fonction f est bornée sur T .
- b) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $|c_n(f)| \leq \|f\|_{\infty, T}$.
- c) En déduire que les deux séries qui entrent dans la définition de $g_f(z)$ sont convergentes pour tout $z \in D$.

Soit $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$

- 2) a) Soit $y \in]-1, 1[$, montrer que $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x + iy)^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\sqrt{1 - y^2}, \sqrt{1 - y^2}[$.
- b) En déduire que $\tilde{S}$ admet une dérivée partielle par rapport à x en tout point de $\tilde{D}$ que l'on exprimera sous forme de la somme d'une série.
- c) Justifier que $(x, y) \mapsto \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x}$ est continue sur $\tilde{D}$.
- 3) a) Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D .
On pourra procéder comme ci-dessus pour établir l'existence et la continuité des dérivées partielles d'ordre 2 de $\tilde{S}$. On pourra être succinct dans la rédaction.
- b) Déterminer $\Delta S(z)$ pour tout $z \in D$.
- 4) a) Montrer qu'il existe des fonctions u et v qui sont des sommes de séries entières de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 telles que

$$\forall z \in D, g_f(z) = u(z) + \overline{v(z)}$$

- b) En déduire que g_f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D et que $\Delta g_f(z) = 0$ pour tout $z \in D$.

On fixe $z \in D$, et on note $P_z(t) = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \right)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

- 5) a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$P_z(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (ze^{-it})^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (\bar{z}e^{it})^n$$

- b) En tenant compte de la définition des c_n dans l'expression de $g_f(z)$, montrer que

$$g_f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) P_z(t) dt$$

- 6) a) Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer $c_k(p_n)$ et $c_k(q_n)$.
 b) Déterminer g_f pour $f = p_n$ et $f = q_n$, où $n \in \mathbb{N}$.
 En déduire la valeur de l'intégrale $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_z(t) dt$.
 c) Étudier le signe de $P_z(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- 7) a) Soit $h \in \mathcal{C}(T)$, montrer que

$$\forall z \in D, |g_f(z) - g_h(z)| \leq \|f - h\|_{\infty, T}$$

- b) Montrer que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{C}(T)$ qui converge uniformément vers f sur T , alors G_{f_n} converge uniformément vers G_f sur $\bar{D}$.
- 8) Montrer que G_f est continue sur $\bar{D}$.

On pourra utiliser le théorème admis dans le préambule.

On se donne maintenant une fonction G vérifiant les conditions (a1), (a2) et (a3) et on se propose de démontrer que $G = G_f$.

- 9) On suppose dans cette question que f est la fonction nulle et que G est à valeurs réelles. Soit $\varepsilon > 0$ et $u : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $u(z) = G(z) + \varepsilon|z|^2$.
- a) On note $h : z \mapsto |z|^2$. Calculer Δh et montrer que $\Delta u(z) > 0$ pour tout $z \in D$.
 b) Justifier qu'il existe un point $z_0 = x_0 + iy_0 \in \bar{D}$ où u atteint son maximum.
 c) Montrer que $z_0 \notin D$ en considérant, dans le cas contraire, le signe des dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2}(x_0, y_0)$.
 d) En déduire que $u(z) \leq \varepsilon$ pour tout $z \in \bar{D}$.
- 10) Conclure dans le cas particulier de la question précédente, puis dans le cas général. (On pourra d'abord étendre la conclusion au cas où f est nulle mais G est à valeurs complexes.)

B. Deux applications

Première application. On considère la fonction G définie sur $\bar{D}$ par $G(x + iy) = e^x \cos y$.

- 11) a) Montrer que G vérifie la condition (a3).
 b) Justifier que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $G(z) = \operatorname{Re}(e^z)$
 c) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Déduire de ce qui précède la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos t} \cos(\sin t) \cos(nt) dt.$$

On pourra interpréter l'intégrale à l'aide de $c_n(G|_T)$ et $c_{-n}(G|_T)$.

Deuxième application. Soit $u : U \rightarrow \mathbb{C}$ une application continue définie sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. Si $a \in \mathbb{C}$ et $R > 0$, on note $D(a, R) = \{z \in \mathbb{C}; |z - a| < R\}$ et $\bar{D}(a, R) = \{z \in \mathbb{C}; |z - a| \leq R\}$.

- 12) Montrer que u est de classe $\mathcal{C}^2$ et telle que $\Delta u = 0$ sur U si et seulement si, pour tout disque fermé $\bar{D}(a, R)$ contenu dans U et pour tout $z \in D(a, R)$, on a

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + R.e^{it}) P_{\frac{z-a}{R}}(t) dt.$$

On pourra considérer la fonction $z \mapsto u(a + Rz)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\Delta u_n = 0$ sur U .

- 13) Déduire de la question précédente que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur U vers une fonction u , alors u est également de classe $\mathcal{C}^2$ et telle que $\Delta u = 0$ sur U .

C. Propriétés duales

Dans cette partie, on fixe $z \in D$ et on considère l'application

$$\begin{aligned}\varphi_z : \mathcal{C}(T) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto g_f(z)\end{aligned}$$

où $\mathcal{C}(T)$ est muni de la norme $\|\cdot\|_{\infty,T}$ définie en préambule.

Pour toute application $\varphi : \mathcal{C}(T) \rightarrow \mathbb{C}$, on considère les quatre propriétés suivantes :

(c1) φ est une forme $\mathbb{C}$ -linéaire et continue ;

(c2) $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(p_n) = z^n$;

(c3) $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(q_n) = \bar{z}^n$;

(c4) $\forall f \in \mathcal{C}(T), |\varphi(f)| \leq \|f\|_{\infty,T}$.

14) Montrer que φ_z vérifie ces quatre propriétés.

15) Montrer que si φ vérifie les conditions (c1), (c2) et (c3), alors $\varphi = \varphi_z$.

Dans la suite de cette partie, on se donne $\varphi : \mathcal{C}(T) \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant les conditions (c1), (c2) et (c4), et on se propose de démontrer que $\varphi = \varphi_z$.

Dans les deux questions suivantes, on se donne $\lambda \in \mathbb{R}$ et on considère une fonction $f \in \mathcal{C}(T)$ à valeurs réelles positives ou nulles. Soit $h \in \mathcal{C}(T)$ définie par

$$h : z \mapsto 2f(z) - \|f\|_{\infty,T} + i\lambda$$

16) Calculer $\|h\|_{\infty,T}^2$ en fonction de $\|f\|_{\infty,T}$ et de λ .

17) En étudiant $|\varphi(h)|^2$, montrer que $\varphi(f) \in \mathbb{R}$ puis que $\varphi(f) \geq 0$.

18) En déduire que $\varphi(\bar{f}) = \overline{\varphi(f)}$ pour tout $f \in \mathcal{C}(T)$, et conclure.