Notations et conventions

- Dans ce problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.
- On confond vecteur de $\mathbb{R}^n$ et matrice colonne correspondante, ce qui permet des écritures du type Ax où A est une matrice carrée réelle de taille n et x un élément de $\mathbb{R}^n$.
- Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et si x est un élément de $\mathbb{R}^n$, on note

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))$$

ce qui, compte tenu de la convention précédente, s'écrit aussi

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

Si i et j sont deux entiers de $[\![1, n]\!]$, la j-ème dérivée partielle de f_i en x est notée $\partial_j f_i(x)$ ou $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$

- Le déterminant d'une matrice carrée A est noté $\det(A)$.
- Avec les notations précédentes, on appelle matrice jacobienne de f en x et on note J_f la matrice carrée réelle de taille n dont le terme situé sur la i-ème ligne et la j-ème colonne est $\partial_j f_i$,

Partie I - Matrice jacobienne symétrique, antisymétrique

Au début de la partie f désigne une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans lui même.
Si i, j et k sont trois entiers de $[\![1, n]\!]$, la dérivée partielle seconde de f_k en x par rapport aux variables x_i et x_j est notée $D_{i,j} f_k(x)$ ou $\dfrac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(x)$, ou encore $f_{i,j,k}(x)$.

1) Justifier que, pour tout x dans $\mathbb{R}^n$ et tous i, j et k dans $[\![1, n]\!]$, on a $f_{i,j,k}(x) = f_{j,i,k}(x)$.
2) Dans les questions a),b),c), on suppose que la matrice jacobienne J_f est antisymétrique pour tout x dans $\mathbb{R}^n$.
   a) Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, et tous i, j et k dans $[\![1, n]\!]$, $f_{i,j,k}(x) = -f_{i,k,j}(x)$.
   b) En déduire que, pour tout x dans $\mathbb{R}^n$ et tous i, j et k dans $[\![1, n]\!]$, on a $f_{i,j,k}(x) = 0$.
   c) Montrer que J_f est constante.
   En déduire qu'il existe une matrice carrée réelle A de taille n et un élément b de $\mathbb{R}^n$ tels que pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax + b$.
   Justifier que A est antisymétrique.
   d) Réciproquement vérifier que si f est de la forme ci-dessus alors elle est de classe $\mathcal{C}^2$ et sa jacobienne est antisymétrique en tout point.
3) a) Soit g de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \nabla g(x)$
   Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que sa jacobienne est symétrique en tout point de $\mathbb{R}^n$.
   b) Réciproquement, soit f est de classe $\mathcal{C}^1$ telle que sa jacobienne est symétrique en tout point de $\mathbb{R}^n$.
   On considère l'application g de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 f_i(tx)dt$
   Montrer que pour tout $j \in [\![1, p]\!]$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$, la $j^{ème}$ dérivée partielle de g en x est définie et égale à $f_j(x)$.
   Conclure.

Partie II - Matrice jacobienne orthogonale

Dans cette partie, f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même.
On considère la proposition

$(\mathscr{P})$ Pour tout x de $\mathbb{R}^n$, la matrice jacobienne $J_f(x)$ de f est orthogonale.

Pour x dans $\mathbb{R}^n$ et i, j, k dans $[\![1, n]\!]$, on note

$$\alpha_{i,j,k}(x) = \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial f_p}{\partial x_i}(x).\frac{\partial^2 f_p}{\partial x_j \partial x_k}(x)$$

4) On suppose $(\mathscr{P})$.

   a) Montrer que pour tous i, j et k de $[\![1, n]\!]$, $\alpha_{i,j,k} = \alpha_{i,k,j} = -\alpha_{k,j,i}$.

   b) En déduire que pour tous i, j et k de $[\![1, n]\!]$, $\alpha_{i,j,k} = 0$.

   c) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale A et un élément b de $\mathbb{R}^n$ tels que, pour tout x de $\mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax + b$

      On pourra interpréter les relations $\alpha_{i,j,k} = 0$ à l'aide de produits matriciels.

5) Examiner la réciproque.

6) Si g est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, on note $\Delta_g(x) = \sum_{i=}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}$ (laplacien de g en x).

   Montrer que $(\mathscr{P})$ est équivalente à la proposition

   $(\mathscr{Q})$ Pour toute fonction g de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, $\Delta_{g \circ f} = (\Delta_g) \circ f$.