## Exercice I

Pour $x$ réel, on pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}\mathrm{d}t$.

1. a) Notons $f : (x,t) \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $f(x,.)$ est continue sur $[0,+\infty[$.
Si $x > 0$ alors $f(x,.)$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ car $f(x,t) = o_{t\to\infty}(e^{-xt})$ et $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.
Donc $f(x,.)$ est intégrable sur $|0,+\infty[$.
Si $x \leqslant 0$ alors $\frac{1}{t} = o_{t\to\infty}(f(x,t))$ donc $f(x,.)$ n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$ car $t \mapsto \frac{1}{t}$ ne l'est pas. Comme $f(x,.)$ est positive, elle n'est pas non plus semi-intégrable sur $[0,+\infty[$ (son intégrale diverge).
L'enemble de définition $I$ de $\varphi$ est donc $\boxed{]0,+\infty[}$.

   b) Pour tout $t \geqslant 0$ la fonction $f(.,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et
$$\forall (x,t) \in ]0,\infty[\times[0,\infty[, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{-t}{1+t}e^{-xt}$$
Pour tout $x > 0$ la fonction $f(x,.)$ est continue (donc cpm) et intégrable sur $[0,\infty[$.
Pour tout $x > 0$ la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}(x,.)$ est continue (donc cpm) sur $[0,\infty[$.
Enfin pour tout $a > 0$ on a
$$\forall (x,t) \in [a,\infty[\times[0,\infty[, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{t}{1+t}e^{-xt} \leqslant e^{-at} = \psi(t)$$
et la fonction $\psi$ est intégrable sur $[0,\infty[$.
On en déduit que $\boxed{\varphi \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } ]0,+\infty[}$ car elle l'est au voisinage de tout point de cet intervalle. De plus
$$\forall x > 0, \quad \varphi'(x) = \int_0^{\infty} \frac{-t}{1+t}e^{-xt}dt$$

   c) Soient $x, y$ des réels tels que $0 < x \leqslant y$.
Alors pour tout $t \geqslant 0$, $e^{-xt} \geqslant e^{-yt}$ donc $\frac{-t}{1+t}e^{-xt} \leqslant \frac{-t}{1+t}e^{-yt}$ car $t \geqslant 0$ et $1+t > 0$.
Par croissance de l'intégration on a $\varphi'(x) \leqslant \varphi'(y)$.
Ainsi $\boxed{\varphi' \text{ est croissante donc } \varphi \text{ est convexe sur l'intervalle } ]0,\infty[}$.

2. a) Pour tout $x > 0$ on a :
$$\varphi'(x) = \int_0^{\infty} \frac{-(t+1)+1}{1+t}e^{-xt}dt = \boxed{-\frac{1}{x} + \varphi(x)}$$

   b) Comme $x \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,\infty[$, une récurrence immédiate montre que $\varphi$ est $\boxed{\text{de classe } \mathscr{C}^n \text{ pour tout naturel } n}$, donc qu'elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

   c) Pour tout $x > 0$,
$$0 \leqslant \varphi(x) \leqslant e^{-xt} = \frac{1}{x}$$
donc par limite par encadrement, $\boxed{\varphi \text{ a pour limite } 0 \text{ en } +\infty}$ (on pouvait aussi utiliser le théorème de convergence dominée).
On en déduit à l'aide de l'équation différentielle précédente que $\boxed{\varphi' \text{ a pour limite } -0+0=0}$ en $+\infty$.

d) Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ et tout $x > 0$, en dérivant $i$ fois l'équation différentielle on obtient :

$$\varphi^{(i+1)}(x) = -\frac{d^i x^{-1}}{dx^i} + \varphi^{(i)}(x) = -(-1)\dots(-i)x^{-1-i} + \varphi^{(i)}(x) = \frac{(-1)^{i+1} i!}{x^{i+1}} + \varphi^{(i)}(x)$$

Ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $x > 0$,

$$\boxed{\varphi(x) - \varphi^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k-1} (\varphi^{(i)}(x) - \varphi^{(i+1)}(x)) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-1)^i i!}{x^{i+1}}}$$

On en déduit que $\boxed{\text{quand } x \to \infty}$ on a $\varphi(x) - \varphi^{(k)}(x) \to \sum_{i=0}^{k-1} 0 = 0$ donc $\boxed{\varphi^{(k)}(x) \to 0 - 0 = 0}$.

3. a) Soit $x > 0$. Comme $t \mapsto -\frac{1}{x}e^{-xt}$ et $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ on obtient par intégration par parties :

$$\varphi(x) = \left[ -\frac{1}{x} e^{-xt} \frac{1}{1+t} \right]_{t=0}^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{x} e^{-xt} \frac{-1}{(1+t)^2} dt$$

sous réserve de convergence du "crochet".
Or $-\frac{1}{x}e^{-xt}\frac{1}{1+t} \to 0$ quand $t \to +\infty$. Donc

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^2} \mathrm{d}t}$$

b) Pour tout $x > 0$ on a

$$0 \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^2} \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt} \mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

donc par limite par encadrement $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^2} \mathrm{d}t = 0$

On en déduit que

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{1}{x} + o_{x \to \infty}(1/x) \sim \frac{1}{x} \text{ quand } x \to \infty}$$

c) En intégrant deux fois par parties il vient pour tout $x > 0$ :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \int_0^{\infty} \frac{2e^{-xt}}{(1+t)^3} dt \right) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \left( \frac{2}{x} - \frac{1}{x} \int_0^{\infty} \frac{6e^{-xt}}{(1+t)^4} dt \right) \\ &= \boxed{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + o_{x \to \infty}(1/x^3)} \end{aligned}$$

par le même raisonnement qu'à la question précédente.

4. Soit $x > 0$
Par le changement de variable $u = 1 + t,\ t = u - 1,\ dt = du$ il vient :

$$\varphi(x) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-x(u-1)}}{u} du = e^x \int_1^{\infty} e^{-xu} \frac{du}{u}$$

puis par le changement de variable $t = xu$, $\frac{du}{u} = d(\ln u) = d(\ln t) = \frac{dt}{t}$

$$\varphi(x) = e^x \int_x^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{t}$$

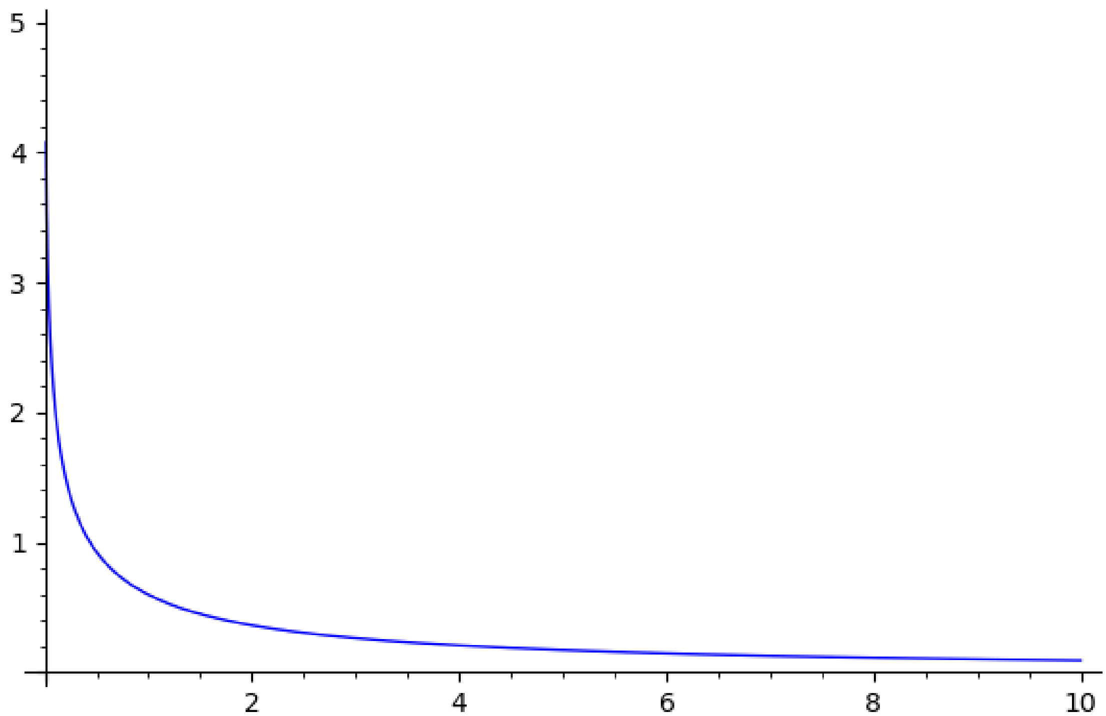
Comme $t \mapsto e^{-t}/t$ est c.p.m., comme $e^{-t}/t \sim \frac{1}{t}$ quand $t \to 0$ et comme $t \mapsto 1/t$ est c.p.m., positive et non intégrable sur $]0, 1]$ on a par intégration des relations de comparaison

$$\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt \sim \int_x^1 \frac{1}{t} dt \text{ quand } x \to 0$$

Ainsi $\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt = -\ln(x) + o_{x\to 0}(\ln x)$.

D'où $\int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = -\ln(x) + o_{x\to 0}(\ln x) + \int_1^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = -\ln(x) + o_{x\to 0}(\ln x)$ car $\ln(x) \to -\infty$ quand $x \to 0$ donc toute constante (finie) est négligeable devant ln en 0.

Par conséquent $\boxed{\varphi(x) \sim 1.(-\ln x) = -\ln x \text{ quand } x \to 0}$.




## Exercice II

1. Soit $x \in [a, b]$.

   Pour tout $t \in [c, d]$, l'application $f(., t)$ est continue par morceaux car continue sur $[a, x]$ comme composée des applications continues $f$ et $u \mapsto (u, t)$ (affine, et $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie).

   Pour tout $u \in [a, x]$, l'application $f(u, .)$ est continue sur $[c, d]$ (même argument).

   La fonction $f$ étant continue sur $[a, b] \times [c, d]$ qui est compact comme produit de deux compacts. Elle est donc bornée.

   Pour tout $(u, t) \in [a, x] \times [c, d]$, $|f(u, t)| \leqslant \|f\|_{\infty}$.

   La fonction constante (donc continue) $u \mapsto \|f\|_{\infty}$ est intégrable sur le segment $[a, x]$.

   Ainsi, par le théorème de continuité des intégrales à paramètre,

   $\boxed{\text{la fonction } t \mapsto \varphi(x, t) = \int_a^x f(u, t) du \text{ est définie est continue sur } [c, d].}$

On pose alors, pour tout $x \in [a,b]$ : $\psi(x) = \displaystyle\int_c^d \varphi(x,t)dt$.

2. Pour tout $t \in [c,d]$, l'application $\varphi(.,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ par le théorème fondamental de l'analyse et car $f(.,t)$ est continue. De plus

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times [c,d] \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) = f(x,t)$$

Soit $x \in [a,b]$, la fonction $\varphi(x,.)$ est continue sur $[c,d]$ par la question précédente, donc est intégrable sur ce segment. De plus la fonction $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(.,t) = f(.,t)$ est continue donc continue par morceaux sur $[c,d]$.
Enfin pour tout $(x,t) \in [a,b] \times [c,d]$,

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) \right| = |f(x,t)| \leqslant \|f\|_\infty$$

et la fonction constante $t \mapsto \|f\|_\infty$ est intégrable sur le segment $[c,d]$.
Donc par le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, $\boxed{\psi \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [a,b]}$ et

$$\forall x \in [a,b] \qquad \boxed{\psi'(x) = \int_c^d \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)dt = \int_c^d f(x,t)dt}$$

3. Par le théorème fondamental de l'analyse, pour tout $x \in [a,b]$,

$$\psi(x) = \psi(a) + \int_a^x \psi'(u)du$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\int_a^x \left( \int_c^d f(u,t)dt \right) du = \int_c^d \left( \int_a^x f(u,t)du \right) dt}$$

4. Appliquant le résultat précédent à $\boxed{x = b}$ $\boxed{\text{on en déduit le théorème de Fubini}}$.