1) Soient a, b, T trois réels strictement positifs.

a) Soit φ définie sur $[0, T]$ par $\varphi : t \mapsto e^{-tb}\left(a + b\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s\right)$. Elle est dérivable et, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\varphi'(t) = -be^{-tb}\left(a + b\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s\right) + f(t)be^{-bt} = be^{-bt}\left(f(t) - a - b\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s\right) \leqslant 0$$

La fonction φ est décroissante donc, pour tout $t \in [0, T]$, $\varphi(t) \leqslant \varphi(0) = a$.
Finalement,

$$f(t) \leqslant a + b\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s \leqslant ae^{bt}$$

b) La fonction X étant de classe $\mathscr{C}^1$, par le théorème fondamental de l'analyse et l'inégalité triangulaire, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}\|X(t)\| &\leqslant \|X(0)\| + \|X(t) - X(0)\| \\ &= \|X(0)\| + \left\|\int_0^t X'(s)\,\mathrm{d}s\right\| \\ &\leqslant \|X(0)\| + \int_0^t \|X'(s)\|\,\mathrm{d}s \\ &\leqslant \|X(0)\| + \int_0^t (a + b\|X(s)\|)\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

c) Pour $t \in [0, T]$,

$$\|X(t)\| \leqslant \|X(0)\| + at + \int_0^t b\|X(s)\|\,\mathrm{d}s \leqslant A + b\int_0^t \|X(s)\| ds$$

où $A = \|X(0)\| + aT$. En utilisant la question (a) pour la fonction $t \mapsto \|X(t)\|$, on obtient que

$$\|X(t)\| \leqslant (\|X(0)\| + aT)e^{bt}$$

On peut considérer alors Y définie sur $[0, T]$ par $Y : t \mapsto X(-t)$. Pour $t \in [0, T]$,

$$\|Y'(t)\| = \|-X'(-t)\| = \|X'(-t)\| \leqslant a + b\|X(-t)\| = a + b\|Y(t)\|$$

On applique ce qui précède à Y. Comme $\|Y(0)\| = \|X(0)\|$, on obtient que pour $t \in [-T, 0]$,

$$\|X(t)\| = \|Y(-t)\| \leqslant (\|X(0)\| + aT)e^{-bt} = (\|X(0)\| + aT)e^{b|t|}$$

On note $X_\lambda(t) = \begin{pmatrix} x_\lambda(t) \\ x'_\lambda(t) \end{pmatrix}$ et on définit l'application $\Phi : \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (\lambda, t) \mapsto X_\lambda(t) \end{array}$.

2) Par définition x_λ est de classe $\mathscr{C}^2$ donc X_λ est de classe $\mathscr{C}^1$. De plus pour $t \in \mathbb{R}$,

$$X'_\lambda(t) = \begin{pmatrix} x'_\lambda(t) \\ p(t)x_\lambda(t) - \lambda x_\lambda(t) \end{pmatrix} = A_\lambda(t)X_\lambda(t)$$

où

$$A_\lambda(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p(t) - \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

3) a) La fonction $\phi : (t, \lambda) \mapsto \|A_\lambda(t)\|_{\mathrm{op}}$ est continue. Comme $[-R, R]^2$ est un compact (comme produit de compacts), la fonction ϕ est bornée sur $[-R, R]^2$. On en déduit que c est bien défini.

b) Soit $\lambda \in [-R,R]$. Pour $t \in [-R,R]$, comme $\|\cdot\|_{\text{op}}$ est une norme d'opérateur,

$$\|X_\lambda'(t)\| = \|A_\lambda(t)X_\lambda(t)\| \leqslant \|A_\lambda(t)\|_{\text{op}}\,\|X_\lambda(t)\| \leqslant c\|X_\lambda(t)\|$$

En utilisant alors 1.(c) avec $a=0$ et $b=c$,

$$\forall t \in [-R,R], \quad \|X_\lambda(t)\| \leqslant \|X_\lambda(0)\|e^{c|t|} = e^{c|t|}$$

La dernière égalité vient du fait que $X_\lambda(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4) a) D'après la question précédente, pour tout $u \in [-R,R]$, $\|X_\lambda(u)\| \leqslant e^{cR}$.
Soit $(s,t,\lambda) \in [-R,R]^3$. Si $t \geqslant s$,

$$\begin{aligned}
\|X_\lambda(t) - X_\lambda(s)\| &= \left\| \int_s^t X_\lambda'(u)\,\mathrm{d}u \right\| \\
&= \left\| \int_s^t A_\lambda(u)X_\lambda(u)\,\mathrm{d}u \right\| \\
&\leqslant \int_s^t \|A_\lambda(u)\|_{\text{op}}\,\|X_\lambda(u)\|\,\mathrm{d}u \\
&\leqslant c\int_s^t e^{cR}\,\mathrm{d}u = ce^{cR}|t-s|
\end{aligned}$$

Le calcul est similaire si $t \leqslant s$.

b) Soit $(t,\lambda,\mu) \in [-R,R]^3$.

$$X_\lambda'(t) - X_\mu'(t) = A_\lambda(t)X_\lambda(t) - A_\mu(t)X_\mu(t) = A_\lambda(t)(X_\lambda(t) - X_\mu(t)) + (A_\lambda(t) - A_\mu(t))X_\mu(t)$$

Or

$$\|A_\lambda(t) - A_\mu(t)\|_{\text{op}} = \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mu-\lambda & 0 \end{pmatrix} \right\|_{\text{op}} = |\lambda - \mu|$$

On en déduit en utilisant la question précédente que

$$\|(X_\lambda - X_\mu)'(t)\| \leqslant c\|(X_\lambda - X_\mu)(t)\| + |\lambda-\mu|e^{cR}$$

On peut encore appliquer 1.(c) avec $a = |\lambda-\mu|e^{cR}$ et $b=c$. Comme $\|(X_\lambda - X_\mu)(0)\| = 0$,

$$\|X_\lambda(t) - X_\mu(t)\| \leqslant (0 + |\lambda-\mu|e^{cR}R)e^{c|t|} \leqslant |\lambda-\mu|Re^{2cR}$$

c) Soit $(\lambda_0,t_0) \in \mathbb{R}^2$. Notons $R = 1 + \max(|\lambda_0|,|t_0|)$. Soit $(\lambda,t) \in R^2$ tel que $|\lambda-\lambda_0| \leqslant 1$ et $|t-t_0| \leqslant 1$ alors (λ,t) et (λ_0,t_0) appartiennent à $[-R,R]^2$. En appliquant ce qui précède,

$$\begin{aligned}
\|\Phi(\lambda,t) - \Phi(\lambda_0,t_0)\| &\leqslant \|\Phi(\lambda,t) - \Phi(\lambda,t_0)\| + \|\Phi(\lambda,t_0) - \Phi(\lambda_0,t_0)\| \\
&\leqslant ce^{cR}|t-t_0| + Re^{2cR}|\lambda-\lambda_0|
\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{(\lambda,t)\to(\lambda_0,t_0)} \Phi(\lambda,t) = \Phi(\lambda_0,t_0)$. La fonction Φ est continue.

5) On note $B_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$.

Posons

$$Z : t \mapsto e^{tB_\lambda}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{(t-s)B_\lambda}\begin{pmatrix} 0 \\ p(s)x_\lambda(s) \end{pmatrix}\mathrm{d}s = e^{tB_\lambda}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{-sB_\lambda}\begin{pmatrix} 0 \\ p(s)x_\lambda(s) \end{pmatrix}\mathrm{d}s\right]$$

En dérivant

$$Z'(t) = B_\lambda Z(t) + e^{tB_\lambda} e^{-tB_\lambda} \begin{pmatrix} 0 \\ p(t)x_\lambda(t) \end{pmatrix} = B_\lambda Z(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ p(t)x_\lambda(t) \end{pmatrix} = B_\lambda Z(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p(t) & 0 \end{pmatrix} X_\lambda(t)$$

Comme $X'_\lambda(t) = B_\lambda X_\lambda(t) + (A_\lambda(t) - B_\lambda)X_\lambda(t)$, $(Z - X_\lambda)'(t) = B_\lambda(Z - X_\lambda)(t)$. Comme de plus $(Z - X_\lambda)(0) = 0$, la fonction $Z - X_\lambda$ est l'unique solution du problème de Cauchy,

$$(PC) \begin{cases} H' = B_\lambda H \\ H'(0) = 0 \end{cases}$$

On en déduit que $Z - X_\lambda$ est la fonction nulle et donc que $X_\lambda = Z$.

6) On suppose dans cette question que $\lambda > 0$.

a) On voit que $B_\lambda^2 = -\lambda I_2$. On en déduit que pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\exp(-tB_\lambda) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^p t^{2p}}{(2p)!} I_2 + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^p t^{2p+1}}{(2p+1)!} B_\lambda = \cos(\sqrt{\lambda}t) I_2 + \frac{\sin(\sqrt{\lambda}t)}{\sqrt{\lambda}} B_\lambda$$

En remplaçant dans la formule ci-dessus et en considérant la première ligne on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x_\lambda(t) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}t)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^t \sin(\sqrt{\lambda}(t-s)) p(s) x_\lambda(s) \,\mathrm{d}s.$$

b) On en déduit que pour $t \in \mathbb{R}_+$,

$$|x_\lambda(t)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\|p\|_\infty}{\sqrt{\lambda}} \int_0^t |x_\lambda(s)| \,\mathrm{d}s$$

On utilise encore 1) avec $a = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ et $b = \frac{\|p\|_\infty}{\sqrt{\lambda}}$ pour obtenir que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad |x_\lambda(t)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{\frac{\|p\|_\infty}{\sqrt{\lambda}} t}$$

Le calcul est similaire si $t < 0$.