Exercice I - [1298]

Pour x réel, on pose $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$.

- 1) a) Déterminer l'intervalle I de $\mathbb{R}$ sur lequel la fonction φ est définie.
 b) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .
 c) Étudier le sens de variation de φ' . En déduire que φ est convexe sur I .
- 2) a) Déterminer une équation différentielle vérifiée par φ sur I .
 b) En déduire que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I .
 c) Déterminer la limite de φ en $+\infty$. En déduire la limite de φ' en $+\infty$.
 d) Pour $x \in I$ et $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\varphi(x) - \varphi^{(k)}(x)$ sous forme d'une somme et en déduire la limite de $\varphi^{(k)}$ en $+\infty$.
- 3) a) Soit $x \in I$, montrer que :

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^2} dt$$

b) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^2} dt = 0$.

En déduire un équivalent de $\varphi(x)$ au voisinage de $+\infty$.

c) Déterminer un développement asymptotique de φ au voisinage de $+\infty$, à la précision $\frac{1}{x^3}$.

- 4) Soit $x \in I$, montrer que :

$$\varphi(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

En déduire que : $\varphi(x) \underset{0+}{\sim} -\ln(x)$ puis tracer le graphe de φ .

Exercice II - [1312bis]

Soit $a < b$ et $c < d$. Soit f une application continue sur $[a, b] \times [c, d]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On veut démontrer le théorème de Fubini qui affirme que

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(u, t) dt \right) du = \int_c^d \left(\int_a^b f(u, t) du \right) dt$$

Pour tout $(x, t) \in [a, b] \times [c, d]$, on pose : $\varphi(x, t) = \int_a^x f(u, t) du$.

- 1) Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, l'application $t \mapsto \varphi(x, t)$ est continue sur $[c, d]$.

On pose alors, pour tout $x \in [a, b]$: $\psi(x) = \int_c^d \varphi(x, t) dt$.

- 2) Montrer que ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$; préciser ψ' .

- 3) En déduire :

$$\forall x \in [a, b], \quad \int_a^x \left(\int_c^d f(u, t) dt \right) du = \int_c^d \left(\int_a^x f(u, t) du \right) dt.$$

- 4) Conclure