

Notations

Dans ce problème, N désigne un entier naturel non nul.

On identifie \mathbf{R}^N à l'espace vectoriel des matrices colonnes réelles $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbf{R})$. On note $\|\cdot\|$ la norme infinie sur \mathbf{R}^N . Si $X = (x_i)_{1 \leq i \leq N} \in \mathbf{R}^N$,

$$\|X\| = \max_{1 \leq i \leq N} |x_i|$$

On note $\|\cdot\|_{\text{op}}$ la norme d'opérateur sur $\mathcal{M}_N(\mathbf{R})$ associée à la norme $\|\cdot\|$ sur \mathbf{R}^N . On rappelle que pour $A \in \mathcal{M}_N(\mathbf{R})$

$$\|A\|_{\text{op}} = \sup_{X \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}} \frac{\|AX\|}{\|X\|}$$

On fixe dans toute la suite du sujet $p \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Pour tout réel λ , on note $x_\lambda \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R})$ l'unique solution de

$$(E_\lambda) \quad \begin{cases} x_\lambda''(t) - (p(t) - \lambda)x_\lambda(t) = 0 & \text{pour tout } t \in \mathbf{R}, \\ x_\lambda(0) = 0, \quad x_\lambda'(0) = 1. \end{cases}$$

1. Soient a, b, T trois réels strictement positifs.

(a) On considère une fonction $f : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$ continue telle que

$$\forall t \in [0, T], \quad f(t) \leq a + b \int_0^t f(s) \, ds$$

Montrer que pour tout $t \in [0, T]$, $f(t) \leq ae^{bt}$.

On pourra étudier les variations de la fonction définie par $t \mapsto \varphi(t) = e^{-tb} \left(a + b \int_0^t f(s) \, ds \right)$.

On considère une fonction $X : [-T, T] \rightarrow \mathcal{M}_{N,1}(\mathbf{R})$ de classe \mathcal{C}^1 telle que

$$\forall t \in [-T, T], \quad \|X'(t)\| \leq a + b\|X(t)\|$$

(b) Montrer que pour tout $t \in [0, T]$, $\|X(t)\| \leq \|X(0)\| + \int_0^t (a + b\|X(s)\|) \, ds$.

(c) En déduire que pour tout $t \in [-T, T]$, $\|X(t)\| \leq (\|X(0)\| + aT)e^{b|t|}$.

On commencera par montrer la relation sur $[0, T]$.

On note $X_\lambda(t) = \begin{pmatrix} x_\lambda(t) \\ x_\lambda'(t) \end{pmatrix}$ et on définit l'application $\Phi : \begin{matrix} \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2 \\ (\lambda, t) \mapsto X_\lambda(t) \end{matrix}$.

2. Montrer que X_λ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbf{R} et que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $X_\lambda'(t) = A_\lambda(t)X_\lambda(t)$ où $A_\lambda(t)$ est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ que l'on précisera.

Dans les questions 3, 4 et 5, on se donne $R > 0$ et on note

$$c = \sup \{ \|A_\lambda(t)\|_{\text{op}} \mid (t, \lambda) \in [-R, R]^2 \}.$$

3. (a) Justifier que c est bien défini.

(b) Montrer que

$$\forall t \in [-R, R], \quad \|X_\lambda(t)\| \leq e^{c|t|}.$$

On pourra utiliser la question 1)

4. (a) Soit $(s, t, \lambda) \in [-R, R]^3$. Montrer que

$$\|X_\lambda(t) - X_\lambda(s)\| \leq ce^{cR}|t - s|.$$

(b) Soit $(t, \lambda, \mu) \in [-R, R]^3$. Montrer que

$$\|X_\lambda(t) - X_\mu(t)\| \leq Re^{2cR}|\lambda - \mu|.$$

(c) Conclure que Φ est continue sur \mathbf{R}^2 .

5. On note $B_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$X_\lambda(t) = e^{tB_\lambda} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{(t-s)B_\lambda} \begin{pmatrix} 0 \\ p(s)x_\lambda(s) \end{pmatrix} ds.$$

6. On suppose dans cette question que $\lambda > 0$.

(a) Montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad x_\lambda(t) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}t)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^t \sin(\sqrt{\lambda}(t-s))p(s)x_\lambda(s)ds.$$

(b) En déduire que si p est bornée

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad |x_\lambda(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{\frac{\|p\|_\infty}{\sqrt{\lambda}}|t|}.$$