

A - Prolongement harmonique

- 1) La partie $T = \{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1\}$ est un compact de \mathbb{C} . En effet, pour $z \in T$, $|z| \leq 1$ donc T est borné. De plus $N : z \mapsto |z|$ est continue donc $T = N^{-1}(\{1\})$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue. Comme \mathbb{C} est un espace vectoriel de dimension finie, T est bien compact.

La fonction f est supposée continue sur T . Elle est donc bornée d'après le théorème des bornes atteintes. Notons $\|f\|_\infty$ la norme infinie de f .

Pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$|c_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) e^{-int} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{it})| dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|f\|_\infty dt = \|f\|_\infty$$

Pour $z \in D$ et $n \in \mathbb{N}$, $|c_n z^n| \leq \|f\|_\infty |z|^n$ et $|c_{-n} \bar{z}^n| \leq \|f\|_\infty |z|^n$

Or la série géométrique $\sum \|f\|_\infty |z|^n$ de raison $|z| < 1$ est convergente donc, par comparaison, les séries $\sum_{n \geq 1} c_n z^n$ et $\sum_{n \geq 1} c_{-n} \bar{z}^n$ sont absolument convergentes donc convergentes.

Finalement, la fonction g_f est bien définie sur D tout entier.

- 2) Soit $(x_0; y_0) \in \tilde{D}$, montrons que \tilde{S} admet une dérivée partielle par rapport à x en $(x_0; y_0)$ autrement dit que $s : x \mapsto \tilde{S}(x; y_0)$ est bien définie au voisinage de x_0 et qu'elle est dérivable en x_0 .

On sait que \tilde{S} est définie sur $\tilde{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\}$. En particulier, pour y_0 fixé, s est définie sur $I =]-\sqrt{1-y_0^2}, \sqrt{1-y_0^2}[$ qui est un voisinage de x_0 .

Considérons la suite de fonctions définies par $f_n : x \in I \mapsto a_n(x + iy_0)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par définition, la série $\sum f_n$ converge simplement vers s sur I autrement dit $s = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur I . Vérifions les hypothèses du théorème de dérivation terme à terme :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur I par composition. De plus, $f'_n(x) = n a_n (x + iy_0)^{n-1}$ pour tout x de I .
- La série $\sum f_n$ converge simplement sur I vers s .
- Montrons que la série des dérivées $\sum f'_n$ converge normalement donc uniformément sur tout segment $[-\alpha, \alpha]$ inclus dans I . Soit $\alpha < \sqrt{1-y_0^2}$, on pose $\rho = \sqrt{\alpha^2 + y_0^2} < 1$.

Pour tout n de \mathbb{N}^* :

$$\forall x \in [-\alpha, \alpha], \quad |f'_n(x)| = n |a_n| |x + iy_0|^{n-1} \leq n |a_n| \sqrt{x^2 + y_0^2}^{n-1} \leq n |a_n| \rho^{n-1}$$

On en déduit que $\|f'_n\|_{\infty, [-\alpha, \alpha]} \leq n |a_n| \rho^{n-1}$.

On sait que la série entière $\sum n a_n z^{n-1}$ a le même rayon de convergence que la série entière $\sum a_n z^n$. Il est donc supérieur ou égal à 1. Comme $\rho < 1$, la série $\sum \|f'_n\|_{\infty, [-\alpha, \alpha]}$ à termes positifs converge (i.e. $\sum f'_n$ converge normalement sur $[-\alpha, \alpha]$) par comparaison à la série à termes positifs $\sum n |a_n| \rho^{n-1}$ convergente.

Le théorème de dérivation de dérivation terme à terme assure donc que s est de classe \mathcal{C}^1 sur I donc en x_0 et que $s' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$.

Finalement, nous avons que \tilde{S} admet une dérivée partielle selon x en tout point de \tilde{D}

De plus

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial x}(x_0; y_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x_0 + iy_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x_0 + iy_0)^n \quad \forall (x_0; y_0) \in \tilde{D}$$

Pour finir, soit u la somme sur D de la série entière $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$ de la variable complexe z ; comme D est inclus dans l'ouvert de convergence de u (car c'est le même que celui de $\sum a_n z^n$), u est bien définie et continue comme fonction de la variable z sur D . Ainsi

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial x} = \tilde{u} \text{ est continue comme fonction de deux variables sur } \tilde{D}.$$

- 3) Soit $(x_0; y_0) \in \tilde{D}$, montrons que \tilde{S} admet une dérivée partielle par rapport à y en $(x_0; y_0)$ autrement dit que $w : x \mapsto \tilde{S}(x_0; y)$ est bien définie au voisinage de y_0 et qu'elle est dérivable en y_0 . On travaille cette fois sur $I =]-\sqrt{1-x_0^2}, \sqrt{1-x_0^2}[$.

Les calculs sont similaires à ceux de la question précédente. On pose cette fois $w_n : y \mapsto a_n(x_0 + iy)^n$ qui sont des fonctions de classe \mathcal{C}^1 de dérivées $w'_n : y \mapsto i n a_n(x_0 + iy)^{n-1}$.

On montre de même que la série $\sum w'_n$ converge normalement donc uniformément sur tout segment $[-\alpha, \alpha] \subset I$ ce qui montre que w est de classe \mathcal{C}^1 .

Donc \tilde{S} admet une dérivée partielle selon y en tout point de \tilde{D} donnée par :

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial y}(x_0; y_0) = \sum_{n=1}^{\infty} i n a_n(x_0 + iy_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} i(n+1)a_{n+1}(x_0 + iy_0)^n \quad \forall (x_0; y_0) \in \tilde{D}$$

La continuité de $\frac{\partial \tilde{S}}{\partial y}$ est similaire à ce qui a été fait à la question précédente.

Soit la suite définie par $d_n = (n+1)a_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La série entière $\sum d_n z^n$ a même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$, on peut appliquer la question précédente 2) et le premier point de cette question à $\sum d_n z^n$ ce qui permet de conclure que

$$\tilde{u} : (x_0; y_0) \in \tilde{D} \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} d_k(x_0 + iy_0)^k = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x}(x_0; y_0)$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur \tilde{D} . On a même

$$\forall (x_0; y_0) \in \tilde{D}, \quad \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial x^2}(x_0; y_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)a_{n+2}(x_0 + iy_0)^n \text{ et } \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial y \partial x}(x_0; y_0) = i \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)a_{n+2}(x_0 + iy_0)^n$$

On en déduit par multiplication par i que $i \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y}$ est aussi de classe \mathcal{C}^1 sur \tilde{D} et donc la fonction

\tilde{S} est de classe \mathcal{C}^2 sur \tilde{D} , on a de plus trouvé : $\forall (x_0; y_0) \in \tilde{D}$

$$\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial x^2}(x_0; y_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)a_{n+2}(x_0 + iy_0)^n \text{ et } \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial y^2}(x_0; y_0) = i^2 \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial x^2}(x_0; y_0) = -\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial x^2}(x_0; y_0)$$

Donc par somme $(\Delta S)(z) = 0$ pour tout z de D .

- 4) On a vu à la question 1) que pour tout entier n , $|c_n(f)| \leq \|f\|_{\infty}$ et $|\overline{c_{-n}(f)}| = |c_{-n}(f)| \leq \|f\|_{\infty}$. On en déduit que les séries entières $\sum_{n \geq 1} c_n(f)z^n$ et $\sum_{n \geq 1} \overline{c_{-n}(f)}z^n$ ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

On pose alors

$$u : z \mapsto c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)z^n \text{ et } v : z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{c_{-n}(f)}z^n$$

De ce fait, pour tout $z \in D$,

$$g_f(z) = u(z) + \overline{v(z)}$$

D'après la question 3), les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^2 sur \tilde{D} (et de laplacien nul). Par somme et composition et conjugaison, la fonction g_f est de classe \mathcal{C}^2 sur \tilde{D} donc g_f est \mathcal{C}^2 sur D .

Par linéarité et le fait que la conjugaison complexe commute à la dérivation on a alors

$$\forall z \in D, \quad \Delta g_f(z) = \Delta u(z) + \overline{\Delta v(z)} = 0 + 0 = 0$$

5) Soit z dans D , on commence par remarquer que

$$\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} = \frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}} = (1 + ze^{-it}) \sum_{n=0}^{+\infty} (ze^{-it})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (ze^{-it})^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (ze^{-it})^n = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (ze^{-it})^n$$

où on a utilisé la formule de la somme d'une série géométrique de raison ze^{-it} avec $|ze^{-it}| = |z| < 1$.

En utilisant alors que pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, $2\text{Re}(\omega) = \omega + \bar{\omega}$, on obtient que

$$P_z(t) = 2\text{Re} \left(\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \right) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (ze^{-it})^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (\bar{z}e^{it})^n$$

D'autre part, par définition des c_n et linéarité de l'intégrale, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) e^{-int} z^n dt$$

Les fonctions $u_n : t \in [-\pi; \pi] \mapsto f(e^{it}) e^{-int} z^n$ sont continues par composition et la série $\sum u_n$ converge uniformément car normalement sur le segment $[-\pi; \pi]$: en effet pour tout t de $[-\pi; \pi]$, on a $|u_n(t)| \leq |z|^n \|f\|_{\infty}$, donc $\|u_n\|_{\infty} \leq |z|^n \|f\|_{\infty}$ d'où la convergence de la série à termes positifs $\sum \|u_n\|_{\infty}$ par comparaison à la série géométrique $\sum |z|^n \|f\|_{\infty}$ convergente car de raison $|z| < 1$.

Ainsi, on peut intégrer terme à terme $\sum u_n$ sur $[-\pi; \pi]$, ce qui donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f(e^{it}) e^{-int} z^n \right) dt$$

Pour les des raisons similaires, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} \bar{z}^n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f(e^{it}) e^{int} \bar{z}^n \right) dt$$

Ainsi par somme et par linéarité de l'intégrale, on obtient à l'aide des deux expressions précédentes,

$$\begin{aligned} g_f(z) &= 1 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f(e^{it}) e^{int} \bar{z}^n \right) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f(e^{it}) e^{-int} z^n \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} f(e^{it}) e^{int} \bar{z}^n + \sum_{n=1}^{+\infty} f(e^{it}) e^{-int} z^n \right) dt \\ &= \boxed{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) P_z(t) dt} \end{aligned}$$

6) Pour tout n de \mathbb{N} , on obtient pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$c_k(p_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p_n(e^{it}) e^{-kt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)t} dt = \delta_{k,n} \text{ avec } \delta_{k,n} \text{ le symbole de Kronecker}$$

De même, on obtient

$$c_k(q_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} q_n(e^{it}) e^{-kt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n+k)t} dt = \delta_{k,-n}$$

On en déduit que g_{p_n} et g_{q_n} sont les fonctions définies sur D par $\boxed{g_{p_n} : z \mapsto z^n \text{ et } g_{q_n} : z \mapsto \bar{z}^n}$. Par abus on notera donc $g_{p_n} = p_n$ et $g_{q_n} = q_n$.

En particulier pour $f = p_0 = 1$, on obtient $\boxed{1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_z(t) dt \quad \forall z \in D.}$

Pour $t \in \mathbb{R}$ et $z \in D$,

$$P_z(t) = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \right) = \frac{\operatorname{Re}((e^{it} + z)(e^{-it} - \bar{z}))}{|e^{it} - z|^2} = \frac{\operatorname{Re}(1 - |z|^2 - e^{it}\bar{z} + e^{-it}z)}{|e^{it} - z|^2} = \boxed{\frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2}}$$

car $e^{it}\bar{z}$ et $e^{-it}z$ sont conjugués donc leurs parties réelles sont égales.

Comme $|z| < 1$, on a donc $\boxed{P_z(t) > 0}$.

7) Soit $h \in \mathcal{C}(T)$. Pour $z \in D$, en utilisant la question 5.b)

$$|g_f(z) - g_h(z)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})P_z(t)dt - \int_{-\pi}^{\pi} h(e^{it})P_z(t)dt \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f - h)(e^{it})P_z(t)dt \right|$$

En utilisant l'inégalité triangulaire et que $P_z(t)$ est un réel positif, on a alors

$$|g_f(z) - g_h(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |(f - h)(e^{it})|P_z(t)dt$$

Or, pour $t \in [-\pi, \pi]$, $e^{it} \in T$ donc $|(f - h)(e^{it})| \leq \|f - h\|_{\infty}$ et finalement, en utilisant que $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_z(t)dt = 1$,

$$|g_f(z) - g_h(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|f - h\|_{\infty} P_z(t)dt \leq \|f - h\|_{\infty}$$

Comme de plus, pour $z \in T$, $|G_f(z) - G_h(z)| = |f(z) - h(z)| \leq \|f - h\|_{\infty}$, on a finalement que pour tout $z \in \bar{D}$, $|G_f(z) - G_h(z)| \leq \|f - h\|_{\infty}$ et donc

$$\|G_f - G_h\|_{\infty, \bar{D}} \leq \|f - h\|_{\infty}$$

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{C}(T)$ qui converge uniformément sur T vers f . Pour tout entier n ,

$$\|G_{f_n} - G_f\|_{\infty, \bar{D}} \leq \|f_n - f\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On en déduit que (G_{f_n}) converge uniformément vers G_f sur \bar{D} .

8) On a vu à la question 6) que $G_{p_k} = p_k$ et $G_{q_k} = q_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ où, par abus, on note encore p_k et q_k les fonctions définies sur \bar{D} définies par $z \mapsto z^k$ et $z \mapsto \bar{z}^k$. De plus, par linéarité de l'intégrale, pour tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$, la fonction qui à $g \in \mathcal{C}(T)$ associe $c_n(g)$ est linéaire. On en déduit que pour $r \in \mathcal{P}(T)$, $G_r = r$ (toujours avec le même abus de notations).

Maintenant, comme $f \in \mathcal{C}(T)$, il existe une suite (r_n) d'éléments de $\mathcal{P}(T)$ qui converge uniformément vers f d'après le théorème de Weierstrass trigonométrique. D'après ce qui précède, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $G_{r_n} = r_n$.

D'après la question 7) comme chaque fonction r_n est bien continue sur T , la suite G_{r_n} converge donc uniformément vers G_f sur \bar{D} . Cela montre finalement que G_f est limite uniforme sur \bar{D} de la suite de fonctions continues (r_n) et donc $\boxed{\text{que } G_f \text{ est continue sur } \bar{D}}$

9) Posons $h : z \mapsto |z|^2$. En utilisant les notations de l'énoncé, $\tilde{h} : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$. On en déduit que

$$\forall z = (x + iy) \in D, \Delta h(z) = \frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial y^2}(x, y) = 2 + 2 = 4$$

Donc, par linéarité, $\boxed{\Delta u(z) = \Delta G(z) + \Delta u(z) = 0 + 4\varepsilon > 0}$

Comme u est une fonction de \bar{D} dans \mathbb{R} continue sur le compact \bar{D} , elle y est bornée et atteint ses bornes, en particulier son maximum : il existe $z_0 = x_0 + iy_0 \in \bar{D}$ tel que $u(z) \leq u(z_0)$ pour tout $z \in \bar{D}$.

Si z_0 est dans D alors $\widetilde{u}_x : x \mapsto \widetilde{u}(x; y_0)$ est définie sur un intervalle ouvert contenant x_0 et par restriction atteint un maximum en x_0 . Comme \widetilde{u}_x est de classe \mathcal{C}^2 (par composition), on a donc $\widetilde{u}_x'(x_0) = 0$ et $\widetilde{u}_x''(x_0) \leq 0$ (cf le lemme démontré ci-après) c'est-à-dire $\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial x^2}(x_0, y_0) \leq 0$. En considérant $\widetilde{u}_y : y \mapsto \widetilde{u}(x_0; y)$, les mêmes arguments conduisent à $\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial y^2}(x_0, y_0) \leq 0$, ainsi par somme $\Delta u(z_0) \leq 0$, ce qui contredit le premier point de la question.

Ainsi z_0 est dans T , donc $G(z_0) = 0$ et $|z_0| = 1$ d'où $u(z_0) = \varepsilon$ et donc $\boxed{\forall z \in \bar{D}, \quad u(z) \leq \varepsilon}$

Démontrons par l'absurde le lemme utilisé précédemment à savoir que si v est une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un intervalle I atteint un maximum en x_0 point intérieur à I alors $v''(x_0) \leq 0$. On a déjà que $v'(x_0) = 0$, supposons $v''(x_0) > 0$, alors par continuité de v'' , il existe un intervalle ouvert I' centré en x_0 contenu dans I sur lequel v'' reste strictement positif, donc v' est strictement croissante sur I' . Or $v'(x_0) = 0$, donc $v' < 0$ sur $I' \cap]-\infty; x_0[$, et donc v est décroissante sur ce même intervalle, ce qui contredit le fait que v admette un maximum en x_0 .

10) Montrons que si $G : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie (a1) pour $f = 0$, (a2) et (a3) alors $G = 0$ i.e. $G = G_f$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, d'après la question 9, on a $G(z) + \varepsilon|z|^2 \leq \varepsilon$ donc $G(z) \leq \varepsilon$ (car $|z|^2 \geq 0$) pour tout $z \in \bar{D}$. Ainsi en faisant tendre ε vers 0, on obtient $G \leq 0$ sur \bar{D} .

La fonction $-G$ vérifie aussi (a1) pour $f = 0$, (a2) et (a3) donc d'après ce qu'on vient de voir, on a aussi $-G \leq 0$ sur \bar{D} i.e. $G \geq 0$ sur \bar{D} . Donc par double inégalité $G = 0$.

Montrons que si $G : \bar{D} \rightarrow \mathbb{C}$ vérifie (a1) pour $f = 0$, (a2) et (a3) alors $G = 0$ i.e. $G = G_f$.

Soit une telle fonction G . Alors les parties réelle et imaginaire $\text{Re}(G) : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\text{Im}(G) : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ de G vérifient :

* l'hypothèse (a2) car $\text{Re}(G)$ et $\text{Im}(G)$ sont continues sur \bar{D} par continuité de G sur \bar{D} (c'est l'hypothèse (a2) pour G).

* l'hypothèse (a1) pour $f = 0$ car les restrictions de $\text{Re}(G)$ et $\text{Im}(G)$ à T sont respectivement les parties réelles et imaginaires de celle de G à T donc sont nulles car G vérifie (a1) pour $f = 0$.

* l'hypothèse (a3). En effet, G vérifie (a3) donc la restriction de G à D est de classe \mathcal{C}^2 et $\Delta G = 0$ sur D , ainsi les restrictions de $\text{Re}(G)$ et $\text{Im}(G)$ à D qui sont les parties réelles et imaginaires de la restriction de G à D , sont de classe \mathcal{C}^2 . De plus, comme la dérivation et Re (respectivement Im) commutent, on a $\Delta \text{Re}(G) = \text{Re}(\Delta G) = 0$ et $\Delta \text{Im}(G) = \text{Im}(\Delta G) = 0$.

Ainsi par le premier point de la question, $\text{Re}(G) = \text{Im}(G) = 0$ i.e. $G = 0$.

Traisons enfin le cas général et montrons que $\boxed{\text{si } G \text{ vérifie (a1) pour } f, \text{ (a2) et (a3), alors } G = G_f.}$

Soit une telle fonction G . La fonction G_f vérifie (a3) d'après la question 4) vérifie (a2) d'après la question 8) et (a1) par définition. Donc $G - G_f$ vérifie (a1) pour $f - f = 0$, (a2) et (a3), donc $G - G_f = 0$ via le point précédent et donc $G = G_f$.

B - Deux applications

11) • La fonction G est définie par $\widetilde{G}(x; y) = e^x \cos(y)$ pour tout $(x; y) \in \widetilde{D}$, donc \widetilde{G} est de classe \mathcal{C}^2 sur \widetilde{D} par composition et produit ce qui prouve que G est \mathcal{C}^2 sur D . De plus,

$$\forall (x; y) \in \widetilde{D}, \quad \Delta G(x + iy) = \frac{\partial^2 \widetilde{G}}{\partial x^2}(x; y) + \frac{\partial^2 \widetilde{G}}{\partial y^2}(x; y) = e^x \cos(y) + e^x (-\cos(y)) = 0$$

Ainsi $\boxed{G \text{ vérifie (a3).}}$

• Par composition, G vérifie aussi (a2) (continuité sur \bar{D}). Et comme G vérifie (a1) pour f la restriction de G à T , la question 10) donne $G = G_f$ sur D .

La fonction G est définie par : $\forall z = x + iy \in \bar{D}$ (avec x, y réels)

$$G(z) = e^x \text{Re}(e^{iy}) = \text{Re}(e^z)$$

Posons $f = G|_T$.

L'intégrale à calculer est égale à

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \operatorname{Re}(e^{int}) dt = \frac{c_n + c_{-n}}{2}$$

où les c_k sont les coefficients de Fourier de f .

Or pour tout $x \in]-1; 1[$, x est dans D et

$$G(x) = e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Par ailleurs, $G = G_f$ car G vérifie (a1), (a2) et (a3). Donc

$$\forall x \in]-1; 1[\subset D, \quad G_f(x) = g_f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n + c_{-n})x^n$$

Donc par unicité des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul (ici, il vaut au moins 1), on obtient : $c_0 = 1$ et $c_n + c_{-n} = 1/n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Donc l'intégrale cherchée est :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos t} \cos(\sin t) \cos(nt) dt = \frac{c_n + c_{-n}}{2} = \frac{1}{2|n|!} \text{ si } n \neq 0 \text{ et } 1 \text{ sinon}$$

12) Soit $u : U \rightarrow \mathbb{C}$ une application continue sur un ouvert U de \mathbb{C} .

• Supposons u de classe \mathcal{C}^2 sur U et $\Delta u = 0$ sur U . Soit $a \in U$ et $R > 0$ tels que $\bar{D}(a; R) \subset U$ et notons $G : z \in \bar{D} \mapsto u(a + Rz) \in \mathbb{C}$.

Alors par composition G est C^2 sur D et $\Delta G(z) = R^2 \Delta u(a + Rz) = 0$ pour tout z de D , ainsi G vérifie (a3). Or G vérifie (a2) par composition et (a1) pour $f : z \in T \mapsto u(a + Rz)$ (qui est bien continue sur T par composition). Ainsi d'après 10), on a $G = G_f$ et en particulier via 5) :

$$\forall z \in D, G_f(z) = g_f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + Re^{it}) P_z(t) dt.$$

Or pour tout z de $D(a, R)$, le complexe $(z - a)/R$ est dans D , donc

$$u(z) = G\left(\frac{z - a}{R}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + Re^{it}) P_{\frac{z-a}{R}}(t) dt$$

• Réciproquement, supposons l'égalité précédente vraie pour tout z de $D(a; R)$ et tout $\bar{D}(a; R) \subset U$. Fixons $(a; R)$ avec $\bar{D}(a; R) \subset U$, l'application $f : z \in T \mapsto u(a + Rz)$ est continue sur T par composition (u est supposée continue sur U), ainsi g_f existe et vérifie via 5):

$$\forall z \in D(a; R), \quad \frac{z - a}{R} \in D, \quad g_f\left(\frac{z - a}{R}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) P_{\frac{z-a}{R}}(t) dt$$

Ainsi notre hypothèse assure $u(z) = g_f\left(\frac{z-a}{R}\right)$ pour tout $z \in D(a; R)$ et via 4), g_f est \mathcal{C}^2 sur D où son laplacien Δg_f est nul, donc par composition u est C^2 et $\Delta u = 0$ sur $D(a; R)$. Ceci étant vrai pour tout $\bar{D}(a; R) \subset U$ et la régularité et le laplacien Δ étant des notions locales, u est C^2 et de laplacien nul sur la réunion W de tous les $D(a; R)$ tels que $\bar{D}(a; R) \subset U$. Comme U est ouvert, pour tout $a \in U$, il existe $R > 0$ t.q. $D(a, R) \subset U$ donc $\bar{D}(a, R/2) \subset U$ ainsi a est dans W et donc $U \subset W$ et comme par définition $W \subset U$, on a $W = U$ et donc bien u est de classe \mathcal{C}^2 sur U et $\Delta u = 0$ sur U .

13) • Il est en fait plus simple d'utiliser la question 7 que la question précédente.

Soient $a \in U$ et $R > 0$ tels que $\bar{D}(a, R) \subset U$ (un tel R existe car U est ouvert).

Posons $G_n : z \in \bar{D} \mapsto u_n(a + Rz)$ et $G : z \in \bar{D} \mapsto u_n(a + Rz)$, et notons f_n et f les restrictions de G_n et G à T .

La suite (f_n) converge uniformément vers f sur T et $G_n = G_{f_n}$ donc par la question 7, la suite (G_n) converge uniformément vers G_f sur \bar{D} . Or G_n converge uniformément vers G sur \bar{D} . Donc $G = G_f$. Donc G est \mathcal{C}^2 sur \bar{D} et $\Delta G = 0$ sur D . Ceci valant pour tout $a \in U$, on en déduit que u est de classe \mathcal{C}^2 sur U et vérifie $\Delta U = 0$.

• Si on tient à utiliser la question précédente :

Par la partie directe de 12), on a pour tout $(a; R)$ t.q. $\bar{D}(a; R) \subset U$ et pour tout z de $D(a; R)$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_n(a + Re^{it}) P_{\frac{z-a}{R}}(t) dt \quad (*)$$

Or pour tous $t \in]-\pi, \pi[$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n(a + Re^{it}) P_{\frac{z-a}{R}}(t)| \leq \|u_n\|_{\infty, T(a, R)} P_{\frac{z-a}{R}}(t)$$

car $P_{\frac{z-a}{R}}$ est à valeurs positives et car u_n étant continue est bornée sur le compact $T(a, R)$ (cercle de centre a et rayon R).

Or la suite $(u_n|_{T(a, R)})$ converge uniformément vers $u|_{T(a, R)}$ (qui est continue comme limite uniforme d'une suite de fonctions continues) donc $(\|u_n\|_{\infty, T(a, R)})$ converge vers $\|u\|_{\infty, T(a, R)}$ donc est bornée, donc il existe $K \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall t \in]-\pi, \pi[\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n(a + Re^{it}) P_{\frac{z-a}{R}}(t)| \leq K P_{\frac{z-a}{R}}(t) = \varphi(t)$$

φ est intégrable donc par convergence dominée, on obtient :

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(e^{it}) P_{\frac{z-a}{R}}(t) dt$$

et ce pour tout z de $D(a; R)$ avec $\bar{D}(a; R) \subset U$. Or u est continue sur U comme limite uniforme (sur U) de la suite de fonctions continues u_n sur U . Ainsi la réciproque de 12) assure que

$$\boxed{u \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } U \text{ et } \Delta u = 0 \text{ sur } U.}$$

C - Propriétés duales

Dans la suite nous noterons $N = \|\cdot\|_{\infty, T}$ pour alléger les écritures.

14) La question 6) assure que $\boxed{\varphi_z \text{ vérifie (c2) et (c3).}$

Dans 7), avec $f_n = 0$ (donc $G_{f_n} = 0$), on a vu $|\varphi(f)| = |G_f(z) - G_{f_n}(z)| \leq N(f - f_n) = N(f)$ et ce pour tout f de $\mathcal{C}(T)$ donc $\boxed{\varphi_z \text{ vérifie (c4).}$

Enfin, l'application qui à $f \in \mathcal{C}(T)$ associe la suite de ses coefficients de Fourier est \mathbb{C} -linéaire par linéarité de l'intégrale, donc par produit $f \in \mathcal{C}(T) \mapsto (c_n(f)z^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $f \in \mathcal{C}(T) \mapsto (c_{-n}(f)\bar{z}^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ aussi. L'application qui à une suite associe la somme de la série associée (quand celle-ci est convergente) est aussi \mathbb{C} -linéaire donc par composition et combinaison linéaire, φ est bien \mathbb{C} -linéaire. De plus, elle arrive dans C , donc c'est une forme \mathbb{C} -linéaire et comme on a (c4), φ est bien continue et $\boxed{\varphi_z \text{ vérifie (c1).}$

15) Soit φ vérifiant (c1), (c2) et (c3). Considérons f dans $\mathcal{C}(T)$. D'après 8, il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{P}(T)$ qui converge uniformément vers f sur T .

Or pour tout g de $\mathcal{P}(T)$, par définition de $\mathcal{P}(T)$, il existe N et M deux entiers naturels non nuls

et des complexes $(\alpha_k)_{k=0 \dots N}$ et $(\beta_k)_{k=1 \dots M}$ avec $g = \sum_{k=0}^N \alpha_k p_k + \sum_{k=1}^M \alpha_k q_k$ donc la linéarité de φ et φ_z

(hypothèse (c1), cf 14) pour φ_z) puis les hypothèses (c2) et (c3) vérifiées par φ et φ_z , assurent

$$(\varphi - \varphi_z)(g) = \sum_{k=0}^N \alpha_k (\varphi - \varphi_z)(p_k) + \sum_{k=1}^M \alpha_k (\varphi - \varphi_z)(q_k) = \sum_{k=0}^N \alpha_k (z^k - z^k) + \sum_{k=1}^M \alpha_k (\bar{z}^k - \bar{z}^k) = 0$$

Ainsi $\varphi(f_n) = \varphi_z(f_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur T i.e. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f au sens de la norme N , donc par continuité de φ et φ_z (hypothèse (c1), cf 14) pour φ_z , $\varphi(f_n)$ tend vers $\varphi(f)$ et $\varphi_z(f_n)$ vers $\varphi_z(f)$ quand n tend vers $+\infty$, donc $\varphi(f) = \varphi_z(f)$. Comme f a été choisie quelconque dans $\mathcal{C}(T)$, on a bien $\boxed{\varphi = \varphi_z}$.

16) Montrons que $(N(h))^2 = N(h^2)$.

Comme $N(h)$ majore $\{|h(t)|; t \in T\}$, par croissance de la fonction carrée sur \mathbb{R}_+ , le réel $(N(h))^2$ majore bien $\{|h(t)|^2; t \in T\} = W$ donc $N(h^2) = \sup W = \sup_T |h|^2 \leq (N(h))^2$ car $\sup W$ est le plus petit majorant de W .

De même, $N(h) = N(|h|) = (N(h^2))^{1/2} \leq N(h^2)^{1/2}$ par croissance de la fonction racine carrée sur \mathbb{R}_+ . Donc $N(h)^2 \leq N(h^2)$. Ainsi $N(h)^2 = N(h^2)$.

$$\begin{aligned} N(h)^2 &= N(h^2) = N(|h|^2) = N((2f - N(f))^2 + \lambda^2) \\ &= N((2f - N(f))^2) + \lambda^2 \text{ car } (2f - N(f))^2 \geq 0 \\ &= N(2f - N(f))^2 + \lambda^2 \end{aligned}$$

Or $0 \leq f \leq N(f)$ donc $-N(f) \leq 2f - N(f) \leq N(f)$ donc $|2f - N(f)| \leq N(f)$, et ainsi $N(2f - N(f)) \leq N(f)$.

De plus $2f - N(f) \leq N(2f - N(f))$ donc $f \leq \frac{N(2f - N(f)) + N(f)}{2}$ et ainsi $N(f)$, plus petit majorant de $|f| = f$, vérifie $N(f) \leq \frac{N(2f - N(f)) + N(f)}{2}$ d'où $N(f) \leq N(2f - N(f))$.

Donc $N(2f - N(f)) = N(f)$.

On a donc : $\boxed{(N(h))^2 = (N(f))^2 + \lambda^2}$.

17) La linéarité de φ (hypothèse (c1)) donne $\varphi(h) = 2\varphi(f) + (-N(f) + i\lambda)\varphi(p_0)$. Comme $\varphi(p_0) = z^0 = 1$ via (c2), on a $\varphi(h) = 2\varphi(f) - N(f) + i\lambda$. Ainsi d'après (c4), on obtient par croissance de la fonction carré sur \mathbb{R}_+ :

$$|2\varphi(f) - N(f) + i\lambda|^2 = |\varphi(h)|^2 \leq N(h)^2 = N(f)^2 + \lambda^2$$

Ainsi pour tout réel λ ,

$$\begin{aligned} \left(2\operatorname{Re}(\varphi(f)) - N(f)\right)^2 + \left(2\operatorname{Im}(\varphi(f)) + \lambda\right)^2 &\leq N(f)^2 + \lambda^2 \\ \left(2\operatorname{Re}(\varphi(f)) - N(f)\right)^2 + 2\operatorname{Im}(\varphi(f))\left(2\operatorname{Im}(\varphi(f)) + \lambda\right) &\leq N(f)^2 \end{aligned}$$

Si $\operatorname{Im}(\varphi(f)) > 0$ (respectivement < 0) alors le membre de gauche tend vers $+\infty$ quand λ tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$), ce qui est contradictoire. Donc $\boxed{\operatorname{Im}(\varphi(f)) = 0}$.

On a donc $(2\varphi(f) - N(f))^2 \leq N(f)^2$ donc $|2\varphi(f) - N(f)| \leq N(f)$.

Ainsi $-N(f) \leq 2\varphi(f) - N(f)$ donc $\boxed{\varphi(f) \geq 0}$.

18) Soit $f \in \mathcal{C}(T)$ et g, h ses parties réelle et imaginaire. Par \mathbb{C} -linéarité de φ ,

$$\varphi(f) = \varphi(g) + i\varphi(h) \quad \text{et} \quad \varphi(\bar{f}) = \varphi(g) - i\varphi(h)$$

Or

$$\varphi(g) = \varphi(g + N(g)) - \varphi(N(g)p_0) = \varphi(g + N(g)) - N(g) \in \mathbb{R}$$

car $g + N(g)$ est à valeurs positives, donc $\varphi(g + N(g)) \in \mathbb{R}$ par la question précédente.

De même $\varphi(h) \in \mathbb{R}$.

Ainsi $\boxed{\varphi(\bar{f}) = \overline{\varphi(f)}}$.

En particulier on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\varphi(q_n) = \varphi(\bar{p}_n) = \overline{\varphi(p_n)} = \overline{z^n} = \bar{z}^n$.

Donc φ vérifie (c3). On en déduit que $\boxed{\varphi = \varphi_z}$.