On considère $p \in \mathscr{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, et $x \in \mathscr{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ une solution non nulle de l'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad x''(t) - p(t)x(t) = 0 \tag{1}$$

On note $\mathscr{Z} = \{t \in [0,1] \mid x(t) = 0\}$ l'ensemble des zéros de x sur $[0,1]$.

1. On suppose que $\mathscr{Z}$ est infini.
   (a) Justifier que l'on peut construire une suite $(t_k)_{k\geqslant 0}$ d'éléments de $\mathscr{Z}$ deux à deux distincts qui soit convergente. On note alors $\ell \in [0,1]$ la limite de $(t_k)_{k\geqslant 0}$.
   (b) Montrer que l'on peut construire une suite $(s_k)_{k\geqslant 0} \in [0,1]$ convergeant vers ℓ telle que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $x'(s_k) = 0$.
   (c) En déduire que $x(s) = x'(s) = 0$.
   (d) En déduire que $\mathscr{Z}$ est fini.
2. On pose $n = |\mathscr{Z}|$. On suppose dans cette question que $n \geqslant 2$. On note $a_1, \ldots, a_n$ les zéros de x, rangés en ordre croissant. Soit $q \in \mathscr{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ tel que

   $$\forall t \in [0,1], \quad q(t) < p(t) \tag{2}$$

   On considère une fonction $y \in \mathscr{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telle que

   $$\forall t \in [0,1], \quad y''(t) - q(t)y(t) = 0 \tag{3}$$

   On fixe $j \in \{1, \ldots, n-1\}$. Le but de cette question est de montrer que y s'annule sur $]a_j, a_{j+1}[$.
   (a) On suppose d'abord que

   $$\forall t \in]a_j, a_{j+1}[, \quad x(t) > 0 \quad \text{et} \quad y(t) > 0,$$

   et on note
   $$w(t) = y(t)x'(t) - y'(t)x(t)$$
   Montrer que $w\left(a_{j+1}\right) > w\left(a_j\right)$. En déduire une contradiction.
   (b) Montrer qu'il existe $t \in]a_j, a_{j+1}[$ tel que $y(t) = 0$.