1. C'est du cours.
2. Évaluons $x_{n+1}(t) - x_n(t)$.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall t \in I, x_{n+1}(t) - x_n(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} a(u)(x_n(u)) + b(u)du - x_0 - \int_{t_0}^{t} a(u)(x_{n-1}(u)) + b(u)du \\ &= \int_{t_0}^{t} a(u)(x_n(u) - x_{n-1}(u))du\end{aligned}$$

La dernière égalité utilise que pour tout $u \in I$, $a(u)$ est linéaire.

3. La fonction a est supposée continue de I dans $\mathscr{L}(E)$ (en particulier en utilisant la norme $\|.\|_{\text{op}}$ sur l'ensemble d'arrivé). Comme I est un compact (c'est un segment). Il existe M tel que pour tout $t \in I$, $\|a(t)\|_{\text{op}} \leqslant M$.
Par définition de la norme subordonnée, pour vecteur $y \in E$ et tout $t \in E$,

$$\|a(t)(y)\|_E \leqslant \|a(t)\|_{\text{op}}\|y\|_E \leqslant M\|y\|_E$$

.

Donc pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $t \in I$,

$$\|a(t)(x_n(t) - x_{n-1}(t))\|_E \leqslant M\|x_n(t) - x_{n-1}(t)\|_E$$

4. Pour $t \geqslant t_0$,

$$\begin{aligned}\|x_2(t) - x_1(t)\|_E &= \left\|\int_{t_0}^{t} a(u)(x_1(u) - x_0(u))du\right\|_E \\ &\leqslant \int_{t_0}^{t} \|a(u)(x_1(u) - x_0(u))\|_E du \\ &\leqslant \int_{t_0}^{t} M\|x_1(u) - x_0(u)\|_E du \\ &\leqslant \int_{t_0}^{t} M\|x_1 - x_0\|_\infty du \\ &\leqslant (t - t_0)M\|x_1 - x_0\|_\infty\end{aligned}$$

Dans le calcul ci-dessus on a utilisé que $x_1 - x_0$ est bornée sur I car c'est une fonction continue et que I est un compact. Cela prouve que $\|x_1 - x_0\|_\infty$ est bien défini.
En procédant de même quand $t \leqslant t_0$ on a alors $\|x_2(t) - x_1(t)\|_E \leqslant |t - t_0|M\|x_1 - x_0\|_\infty$.
Soit $t_0 \in I$ fixé. Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \geqslant 1$:

$$H(n) : \forall t \in I, \|x_{n+1}(t) - x_n(t)\|_E \leqslant \frac{M^n|t - t_0|^n}{n!}\|x_1 - x_0\|_\infty$$

- $\boxed{\text{I}}$ Le cas $n = 1$ a été traité ci-dessus.
- $\boxed{\text{H}}$ Soit $n \geqslant 1$. On suppose $H(n)$ et on montre $H(n + 1)$.
  Pour $t \geqslant t_0$,

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}(t) - x_n(t)\|_E &= \left\|\int_{t_0}^{t} a(u)(x_n(u) - x_{n-1}(u))du\right\| \\ &\leqslant \int_{t_0}^{t} \|a(u)(x_n(u) - x_{n-1}(u))\|_E du \\ &\leqslant \int_{t_0}^{t} M\|x_n(u) - x_{n-1}(u)\|_E du \\ &\leqslant \int_{t_0}^{t} \frac{M^{n+1}(u - t_0)^n}{n!}\|x_1 - x_0\|_\infty du \\ &\leqslant \frac{M^{n+1}(t - t_0)^{n+1}}{(n + 1)!}\|x_1 - x_0\|_\infty\end{aligned}$$

Le cas pour $t \leqslant t_0$ est similaire et on obtient $H(n+1)$.

Comme $|t - t_0| \leqslant \ell$ où ℓ est la longueur de l'intervalle, on a

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall t \in I, \|x_{n+1}(t) - x_n(t)\|_E \leqslant \frac{M^n \ell^n}{n!} \|x_1 - x_0\|_\infty.$$

5. Le résultat précédent permet d'écrire que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \|x_{n+1} - x_n\|_\infty \leqslant \frac{M^n \ell^n}{n!} \|x_1 - x_0\|_\infty.$$

Cela permet de montrer que la série $\left(\sum_{n\geqslant 0} \|x_{n+1} - x_n\|_\infty\right)$ converge, ce qui signifie que la série de fonctions $\left(\sum_{n\geqslant 0} x_{n+1} - x_n\right)$ converge normalement donc uniformément sur I. Notons S sa somme. Maintenant, pour tout $N \geqslant 1$, par télescopage

$$x_N = x_0 + \sum_{n=0}^{N-1} x_{n+1} - x_n \xrightarrow{CU} x_0 + S$$

La suite de fonctions (x_n) converge uniformément sur I.

6. Notons x la limite de (x_n), il reste à montrer que x est bien la solution cherchée. Par construction, pour tout entier n et tout $t \in I$,

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(u)(x_n(u)) + b(u) du$$

Soit $n \in \mathbf{N}$. On pose $z_n : t \mapsto a(t)(x_n(t)) + b(t)$ et $z : t \mapsto a(t)(x(t)) + b(t)$.
Pour tout $t \in I$,

$$\|z_n(t) - z(t)\|_E = \|a(t)(x_n(t) - x(t))\|_E \leqslant M\|x_n(t) - x(t)\|_E$$

On en déduit que

$$\|z_n - z\|_\infty \leqslant M\|x_n - x\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Cela signifie que la suite (z_n) converge uniformément vers z sur le segment I. On a donc bien, en utilisant que I est un segment,

$$\forall t \in I, x(t) = x_0 + \lim_{n\to+\infty} \int_{t_0}^{t} z_n(u) du = x_0 + \int_{t_0}^{t} z(u) du = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(u)(x(u)) + b(u) du$$

La fonction x est bien solution du problème de Cauchy.

7. On suppose avoir deux fonctions x_1 et x_2 vérifiant notre problème de Cauchy (sous sa forme intégrale). On a alors

$$\forall t \in I, x_1(t) - x_2(t) = \int_{t_0}^{t} a(u)(x_1(u) - x_2(u)) du.$$

On peut répéter les calculs des questions 4 et 5 pour obtenir que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \|x_1 - x_2\|_\infty \leqslant \frac{M^n \ell^n}{n!} \|x_1 - x_2\|_\infty$$

En faisant tendre n vers ∞, on obtient bien que $\|x_1 - x_2\|_\infty = 0$ et donc $x_1 = x_2$.

8. Si I n'est plus un segment. On sait que pour tout segment $K \subset I$, il existe une unique solution x_K du problème de Cauchy sur K. Maintenant pour tout $t \in I$ et K, K' deux segments dans I qui contiennent t. On peut considérer le plus petit segment dans I contentant K et K'. Par unicité de la solution sur ce segment on a $x_K(t) = x_{K'}(t)$. De ce fait, on peut construire une fonction $x : t \mapsto x_K(t)$ où K est **un** segment qui contient t.