

- Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien de dimension  $n > 0$  dont le produit scalaire est noté  $(\cdot | \cdot)$  et la norme euclidienne est notée  $\|\cdot\|$ . On note  $L(E)$  l'espace vectoriel des endomorphismes de  $E$  et  $GL(E)$  le groupe des automorphismes de  $E$ . Pour tout endomorphisme  $u$  de  $E$ , on note  $u^i$  l'endomorphisme  $u \circ u \circ \dots \circ u$  ( $i$  fois) avec la convention  $u^0 = Id_E$  (identité). L'ensemble vide est noté  $\emptyset$ .
- On rappelle qu'un sous-ensemble  $C$  de  $E$  est *convexe* si pour tous  $x, y$  dans  $C$  et tout  $\lambda \in [0, 1]$ , on a  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$ . De plus, pour toute famille  $a_1, \dots, a_p$  d'éléments de  $C$  convexe et tous nombres réels positifs ou nuls  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  dont la somme est égale à 1, on a  $\sum_{i=1}^p \lambda_i a_i \in C$ .
- Si  $F$  est un sous-ensemble quelconque de  $E$ , on appelle *enveloppe convexe* de  $F$ , et on note  $Conv(F)$ , le plus petit sous-ensemble convexe de  $E$  (au sens de l'inclusion) contenant  $F$ .
- On note  $\mathcal{H}$  l'ensemble des  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in (\mathbf{R}^+)^{n+1}$  tels que  $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ .  
On admet que  $Conv(F)$  est l'ensemble des combinaisons linéaires de la forme  $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$  où  $x_1, \dots, x_{n+1} \in F$  et  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathcal{H}$ .
- L'espace vectoriel des matrices à coefficients réels ayant  $n$  lignes et  $m$  colonnes est noté  $M_{n,m}(\mathbf{R})$ . On notera en particulier  $M_n(\mathbf{R}) = M_{n,n}(\mathbf{R})$ . La matrice transposée d'une matrice  $A$  est notée  $A^\top$ . La trace de  $A$  est notée  $\text{tr}(A)$ .
- On note  $GL_n(\mathbf{R})$  le groupe linéaire des matrices de  $M_n(\mathbf{R})$  inversibles et  $O_n(\mathbf{R})$  le groupe orthogonal d'ordre  $n$ .

Les parties  $A, B$  et  $C$  sont indépendantes

## A. Préliminaires sur les matrices symétriques

On note  $S_n(\mathbf{R})$  le sous-espace vectoriel de  $M_n(\mathbf{R})$  formé des matrices symétriques.

On rappelle qu'une matrice  $S \in S_n(\mathbf{R})$  est dite *définie positive* si et seulement si pour tout  $X \in M_{n,1}(\mathbf{R})$  non nul, on a  $X^\top S X > 0$ . On note  $S_n^{++}(\mathbf{R})$  l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

- 1 ▷ (Question de cours) Redémontrer qu'une matrice symétrique  $S \in S_n(\mathbf{R})$  est définie positive si et seulement si son spectre est contenu dans  $\mathbf{R}^{+*}$ .
- 2 ▷ En déduire que pour tout  $S \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ , il existe  $R \in GL_n(\mathbf{R})$  tel que  $S = R^\top R$ . Réciproquement montrer que pour tout  $R \in GL_n(\mathbf{R})$ ,  $R^\top R \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ .
- 3 ▷ Montrer que l'ensemble  $S_n^{++}(\mathbf{R})$  est convexe.

## B. Autres préliminaires

Les trois questions de cette partie sont mutuellement indépendantes.

- 4 ▷ Soit  $K$  un sous-ensemble compact de  $E$  et  $\text{Conv}(K)$  son enveloppe convexe. On rappelle que  $\mathcal{H}$  est l'ensemble des  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in (\mathbf{R}^+)^{n+1}$  tels que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ . Définir une application  $\Phi$  de  $\mathbf{R}^{n+1} \times E^{n+1}$  dans  $E$  telle que  $\text{Conv}(K) = \Phi(\mathcal{H} \times K^{n+1})$ . En déduire que  $\text{Conv}(K)$  est un sous-ensemble compact de  $E$ .
- 5 ▷ On désigne par  $g$  un endomorphisme de  $E$  tel que pour tous  $x, y$  dans  $E$ ,  $(x|y) = 0$  implique  $(g(x)|g(y)) = 0$ .  
Montrer qu'il existe un nombre réel positif  $k$  tel que pour tout  $x \in E$ ,  $\|g(x)\| = k\|x\|$ .  
On pourra utiliser une base orthonormée  $(e_1, \dots, e_n)$  et considérer les vecteurs  $e_1 + e_i$  et  $e_1 - e_i$  pour  $i \in \{2, \dots, n\}$ .  
En déduire que  $g$  est la composée d'une homothétie et d'une isométrie vectorielle.
- 6 ▷ On se place dans l'espace vectoriel euclidien  $M_n(\mathbf{R})$  muni du produit scalaire canonique défini par  $(A|B) = \text{tr}(A^\top B)$ . (On ne demande pas de vérifier que c'est bien un produit scalaire).  
Montrer que le groupe orthogonal  $O_n(\mathbf{R})$  est un sous-groupe compact du groupe linéaire  $GL_n(\mathbf{R})$ .

## C. Quelques propriétés de la compacité

- 7 ▷ Soit  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite d'éléments de  $E$  pour laquelle il existe un réel  $\varepsilon > 0$  tel que pour tous entiers naturels  $n \neq p$ , on ait  $\|x_n - x_p\| \geq \varepsilon$ .

Montrer que cette suite n'admet aucune valeur d'adhérence.

Soit  $K$  un sous-ensemble compact de  $E$ . On note  $B(x, r)$  la boule ouverte de centre  $x \in E$  et de rayon  $r$ .

- 8 ▷ Montrer que pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $p > 0$  et  $x_1, \dots, x_p$  éléments de  $E$  tels que  $K \subset \bigcup_{k=1}^p B(x_k, \varepsilon)$ . (On pourra raisonner par l'absurde pour construire une suite d'éléments de  $K$  n'ayant aucune valeur d'adhérence.)

On considère une famille  $(\Omega_i)_{i \in I}$  de sous-ensembles ouverts de  $E$ ,  $I$  étant un ensemble quelconque, telle que  $K \subset \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ .

- 9 ▷ Montrer qu'il existe un réel  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $x \in K$ , il existe  $i \in I$  tel que  $B(x, \alpha)$  soit contenue dans l'ouvert  $\Omega_i$ . (Même indication que pour la question précédente). En déduire qu'il existe une sous-famille finie  $(\Omega_{i_1}, \dots, \Omega_{i_p})$  de la famille  $(\Omega_i)_{i \in I}$  telle que

$$K \subset \bigcup_{k=1}^p \Omega_{i_k}.$$

- 10 ▷ Soit  $(F_i)_{i \in I}$  une famille de fermés de  $E$  contenus dans  $K$  et d'intersection vide :  $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$ .

Montrer qu'il existe une sous famille finie  $(F_{i_1}, \dots, F_{i_p})$  de la famille  $(F_i)_{i \in I}$  telle que

$$\bigcap_{k=1}^p F_{i_k} = \emptyset.$$

## D. Théorème du point fixe de Markov-Kakutani

Soit  $G$  un sous-groupe compact de  $GL(E)$  et  $K$  un sous-ensemble non vide, compact et *convexe* de  $E$ . Pour tout  $x \in E$ , on note  $N_G(x) = \max_{u \in G} \|u(x)\|$ .

**11** ▷ Montrer que  $N_G$  est bien définie et que c'est une norme sur  $E$ .

**12** ▷ Montrer en outre que  $N_G$  vérifie les deux propriétés suivantes :

( $P_1$ ) pour tous  $u \in G$  et  $x \in E$ ,  $N_G(u(x)) = N_G(x)$  ;

( $P_2$ ) pour tous  $x, y \in E$  avec  $x$  non nul,  $N_G(x + y) = N_G(x) + N_G(y)$  si et seulement si  $\lambda x = y$  où  $\lambda \in \mathbf{R}^+$ .

**13** ▷ On considère un élément  $u \in L(E)$ , et on suppose que  $K$  est stable par  $u$ , c'est à dire que  $u(K)$  est inclus dans  $K$ . Pour tout  $x \in K$  et  $n \in \mathbf{N}^*$ , on pose  $x_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} u^i(x)$ . Enfin, on appelle *diamètre* de  $K$  le réel  $\delta(K) = \sup_{x, y \in K} \|x - y\|$  qui est bien défini car  $K$  est borné.

Montrer que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  est à valeurs dans  $K$  et en déduire qu'il en existe une suite extraite convergeant vers un élément  $a$  de  $K$ . Montrer par ailleurs que pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $\|u(x_n) - x_n\| \leq \frac{\delta(K)}{n}$ . En déduire que l'élément  $a$  de  $K$  est un point fixe de  $u$ .

On suppose maintenant que le compact non vide convexe  $K$  est stable par tous les éléments de  $G$ . Soit  $r \geq 1$  un entier,  $u_1, u_2, \dots, u_r$  des éléments de  $G$  et  $u = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r u_i$ .

**14** ▷ Montrer que  $K$  est stable par  $u$  et en déduire l'existence de  $a \in K$  tel que  $u(a) = a$ .

**15** ▷ Montrer que  $N_G \left( \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r u_i(a) \right) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r N_G(u_i(a))$ . En déduire que pour tout  $j \in \{1, \dots, r\}$ , on a

$$N_G \left( u_j(a) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r u_i(a) \right) = N_G(u_j(a)) + N_G \left( \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r u_i(a) \right)$$

**16** ▷ En déduire, pour tout  $j \in \{1, \dots, r\}$ , l'existence d'un nombre réel  $\lambda_j \geq 0$  tel que  $u(a) = \frac{\lambda_j + 1}{r} u_j(a)$ .

**17** ▷ Déduire de la question précédente que  $a$  est un point fixe de tous les endomorphismes  $u_i$  où  $i \in \{1, \dots, r\}$ .

**18** ▷ En utilisant le résultat de la question 10, montrer qu'il existe  $a \in K$  tel que pour tout  $u \in G$ ,  $u(a) = a$ .

## E. Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbf{R})$

On se place à nouveau dans l'espace vectoriel euclidien  $M_n(\mathbf{R})$  muni du produit scalaire défini par  $(A|B) = \text{tr}(A^\top B)$ . On rappelle que  $GL_n(\mathbf{R})$  désigne le groupe linéaire et  $O_n(\mathbf{R})$  le groupe orthogonal d'ordre  $n$ .

Soit  $G$  un sous-groupe compact de  $GL_n(\mathbf{R})$ . Si  $A \in G$ , on définit l'application  $\rho_A$  de  $M_n(\mathbf{R})$  dans lui-même par la formule  $\rho_A(M) = A^\top M A$ . On vérifie facilement, et on l'admet, que pour tout  $M \in M_n(\mathbf{R})$ , l'application qui à  $A \in G$  associe  $\rho_A(M)$  est continue.

On note  $H = \{\rho_A \mid A \in G\}$ ,  $\Delta = \{A^\top A \mid A \in G\}$  et  $K = \text{Conv}(\Delta)$ .

**19** ▷ Montrer que  $\rho_A \in GL(M_n(\mathbf{R}))$  et que  $H$  est un sous-groupe compact de  $GL(M_n(\mathbf{R}))$ .

**20** ▷ Montrer que  $\Delta$  est un compact contenu dans  $S_n^{++}(\mathbf{R})$  et que  $K$  est un sous-ensemble compact de  $S_n^{++}(\mathbf{R})$  qui est stable par tous les éléments de  $H$ .

**21** ▷ Montrer qu'il existe  $M \in K$  tel que pour tout  $A \in G$ ,  $\rho_A(M) = M$ . En déduire l'existence de  $N \in GL_n(\mathbf{R})$  tel que pour tout  $A \in G$ ,  $NAN^{-1} \in O_n(\mathbf{R})$ . En déduire enfin qu'il existe un sous-groupe  $G_1$  de  $O_n(\mathbf{R})$  tel que  $G = N^{-1}G_1N = \{N^{-1}BN \mid B \in G_1\}$ .

Soit  $K$  un sous-groupe compact de  $GL_n(\mathbf{R})$  qui contient  $O_n(\mathbf{R})$ , et  $N \in GL_n(\mathbf{R})$  tel que  $NKN^{-1} \subset O_n(\mathbf{R})$ . On désigne par  $g$  l'automorphisme de  $\mathbf{R}^n$  de matrice  $N$  dans la base canonique de  $\mathbf{R}^n$ , par  $P$  un hyperplan de  $\mathbf{R}^n$ , par  $\sigma_P$  la symétrie orthogonale par rapport à  $P$  et par  $S$  la matrice de cette dernière dans la base canonique.

**22** ▷ Montrer que  $NSN^{-1} \in O_n(\mathbf{R})$ . En déduire que  $g$  conserve l'orthogonalité et en déduire  $K$ .