Devoir surveillé 7 (CCINP)

Calculatrices interdites.
Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème, tous indépendants.

Exercice I

Dans cet exercice, il est inutile de reproduire tous les calculs sur la copie.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Q1. Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable puis déterminer une matrice D diagonale réelle et une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$

Q2. Déterminer une matrice B de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, que l'on explicitera, vérifiant $B^2 = A$

Q3. Déterminer, pour tout entier naturel non nul n, les 9 coefficients de la matrice A^n en utilisant la matrice de passage P

Q4. Donner le polynôme minimal de la matrice A et en déduire, a l'aide d'une division euclidienne de polynômes, la matrice A^n comme une combinaison linéaire des matrices A et I_3.

Exercice II

On considère l'espace vectoriel normé $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Q5. L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est-il fermé dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

Q6. Démontrer que l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Q7. Soit M un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, justifier que :

$$\exists \rho > 0, \quad \forall \lambda \in]0, \rho[, \quad M - \lambda I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

Démontrer que l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Q8. Application :

Si A et B sont deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, démontrer que les matrices $A.B$ et $B.A$ ont le même polynôme caractéristique.

A l'aide des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, prouver que le résultat n'est pas vrai pour les polynômes minimaux.

Q9. Démontrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

Problème

Dans ce problème, E est un espace vectoriel euclidien muni d'un produit scalaire que l'on notera $\langle \mid \rangle$ de norme associée $\|.\|$.
Un endomorphisme u de E est une similitude de E lorsqu'il existe un réel $k > 0$ tel que pour tout vecteur x de E, $\|u(x)\| = k\|x\|$. On dira que u est une similitude de rapport k.
On notera $\mathrm{Sim}(E)$, l'ensemble des similitudes de E et $\mathrm{O}(E)$ désigne l'ensemble des isométries vectorielles de E.
L'objectif de ce problème est de définir et de caractériser les similitudes d'un espace euclidien.

Partie I - Exemples, propriétés

Q10. Démontrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ est, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, la matrice d'une similitude u dont on précisera le rapport.

Q11. Interprétation géométrique avec la similitude u de la question précédente :
Le plan $\mathbb{R}^2$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. On considère les trois points $M(2,1), N(4,1), P(4,2)$ et on définit les points M', N', P' par les relations

$$u(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OM},\ u(\overrightarrow{ON}) = \overrightarrow{ON'},\ u(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP'}$$

Représenter les triangles MNP et $M'N'P'$ et comparer leurs aires.

Q12. Démontrer que tout élément de $\mathrm{Sim}(E)$ est bijectif et établir que $\mathrm{Sim}(E)$, muni de la loi de composition, est un groupe.

Q13. On rappelle qu'une homothétie vectorielle de E est une application de la forme $\alpha\ \mathrm{id}_E$.
Démontrer que $u \in \mathrm{Sim}(E)$, si et seulement si, u est la composée d'une homothétie vectorielle non nulle de E et d'un élément de $O(E)$

Q14. Exemple :
Écrire la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ comme produit de la matrice d'une homothétie vectorielle et de la matrice d'une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^2$ dont on précisera la nature.

Q15. Soient u un endomorphisme de $E, \mathscr{B}$ une base orthonormée de E et A la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$
Démontrer que u est une isométrie vectorielle de E, si et seulement si, $A^\top A = I_n$
Caractériser par une relation matricielle les similitudes de rapport k.

Q16. Exemple :
Démontrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ d'une similitude u dont on donnera le rapport.
Donner la matrice de la similitude u^{-1}.
Vérifier que, pour tout élément f de $\mathrm{O}(E), u^{-1} \circ f \circ u \in \mathrm{O}(E)$

Q17. On appelle sphère de centre 0 et de rayon $r > 0$, l'ensemble des vecteurs x de E tels que $\|x\| = r$.
Démontrer que si u est un endomorphisme de E tel que l'image par u de toute sphère de E de centre 0 est une sphère de E de centre 0, alors u est une similitude de E . On pourra remarquer que pour y vecteur non nul, $\left\| \dfrac{y}{\|y\|} \right\| = 1$.

Partie II - Assertions équivalentes

Q18. Démontrer que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle x \mid y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

En déduire que u est une similitude de rapport k, si et seulement si

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x) \mid u(y) \rangle = k^2 \langle x \mid y \rangle$$

Q19. Démontrer que, si u est une similitude de rapport k, alors, pour tout couple (x, y) de vecteurs de E

$$\langle x \mid y \rangle = 0 \Rightarrow \langle u(x) \mid u(y) \rangle = 0$$

On dit que l'endomorphisme u conserve l'orthogonalité.
Réciproquement, on suppose que u est un endomorphisme de E conservant l'orthogonalité.
Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.
Démontrer que : $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad \langle e_i + e_j \mid e_i - e_j \rangle = 0$, puis que : $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \|u(e_i)\| = \|u(e_j)\|$
On note k la valeur commune prise par tous les $\|u(e_i)\|$.
Après avoir justifié que, pour tout $i \in [\![1, n]\!], \|u(e_i)\| = k\|e_i\|$ démontrer que u est une similitude de rapport k .

Q20. Soit u une application de E dans E (non supposée linéaire) telle qu'il existe un réel $k > 0$ pour lequel :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x) \mid u(y) \rangle = k^2 \langle x \mid y \rangle$$

Démontrer que u est un endomorphisme de E, puis que u est une similitude de E.