DS 7 (CCINP) - Corrigé

Exercice I

1) $\boxed{A \text{ est symétrique réelle donc diagonalisable}}$ (et même orthodiagonalisable).

De manière évidente, on observe que :

- $(1, 1, 1)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 4 ;
- l'orthogonal du vecteur $(1, 1, 1)$ est engendré par $(1, -1, 0)$ et $(1, 0, -1)$, qui sont des vecteurs propres linéairement indépendants associés à la valeur propre 1.

On en déduit que $\boxed{A = PDP^{-1} \text{ avec } D = \operatorname{diag}(4, 1, 1) \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})}$.

Pour la suite, on calcule $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

On peut aussi utiliser une matrice **orthogonale** en normalisant les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

On obtient la matrice $Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$, et $Q^{-1} = Q^T$.

2) Posont $B = P \operatorname{diag}(2, 1, 1) P^{-1} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On a alors $B^2 = P \operatorname{diag}(2, 1, 1)^2 P^{-1} = PDP^{-1} = A$.

Plus explicitement, $\boxed{B = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}}$.

3) $A^n = PD^nP^{-1} = P \operatorname{diag}(4^n, 1, 1) P^{-1}$, ce qui donne après calculs : $\boxed{A^n = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}}$.

4) Comme A est diagonalisable, son polynôme minimal π_A est scindé à racines simples qui sont les valeurs propres de A, d'où $\boxed{\pi_A = (X - 4)(X - 1) = X^2 - 5X + 4}$.

On effectue la division euclidienne de X^n par π_A :

$$X^n = \pi_A Q + aX + b \quad (*)$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

En évaluant (*) en 1 et 4, on obtient le système $\begin{cases} a + b = 1 \\ 4a + b = 4^n \end{cases}$ d'unique solution $(a, b) = \left(\dfrac{4^n - 1}{3}, \dfrac{4 - 4^n}{3}\right)$.

En évaluant maintenant (*) en A, on obtient : $A^n = 0Q(A) + aA + bI_3$, d'où finalement :

$$\boxed{A^n = \frac{4^n - 1}{3} A + \frac{4 - 4^n}{3} I_3}.$$

On peut également utiliser l'interpolation de Lagrange :

$$A^n = R(A) = \left(1^n \frac{X-1}{4-1} + 4^n \frac{X-4}{1-4}\right)(A) = \frac{A - I_3}{3} - 4^n \frac{A - 4I_3}{3}$$

Exercice II

5) $\boxed{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ n'est pas fermé dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$, car la suite $\left(\frac{1}{k} I_n\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ a pour limite la matrice nulle qui n'est pas dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (on a utilisé la caractérisation séquentielle des fermés).

6) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque par l'application déterminant, qui est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, de l'ouvert $\mathbb{R}^*$ de $\mathbb{R}$ (complémentaire du fermé $\{0\}$), donc $\boxed{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ est un ouvert de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.

7) Si le polynôme caractéristique χ_M possède une racine strictement positive, on note ρ la plus petite de ses racines strictement positives (un tel minimum existe bien car l'ensemble des racines est fini) ; sinon on pose $\rho = 1$.
Ainsi, $\boxed{\rho > 0}$ et le polynôme caractéristique χ_M n'a pas de racine dans l'intervalle $]0, \rho[$, d'où :

$$\boxed{\forall \lambda \in \left]0, \rho\right[}, \quad \det(M - \lambda I_n) = (-1)^n \chi_M(\lambda) \neq 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{M - \lambda I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}.$$

La suite $\left(M - \frac{\rho}{k} I_n\right)_{k \geqslant 2}$ est alors à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et converge vers M, matrice quelconque de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, ce qui montre que $\boxed{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ est dense dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.

8) Si $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, les matrices AB et BA sont semblables car $AB = B^{-1}(BA)B$, donc elles ont le même polynôme caractéristique.
Considérons les applications φ_1 et $\varphi_2 \in \mathscr{F}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}_n[X])$ définies par $\varphi_1(B) = \chi_{AB}$ et $\varphi_2(B) = \chi_{BA}$ (la matrice A étant fixée et quelconque dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$).
Nous venons de voir que φ_1 et φ_2 coïncident sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
D'autre part, φ_1 est continue, par composition de l'application $B \mapsto AB$, continue car linéaire sur l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie, avec $M \mapsto \chi_M$ qui est aussi continue par caractérisation à l'aide des coordonnées dans une base, car les coefficients du polynôme caractéristique de M sont polynomiaux en les coefficients de M. De même, φ_2 est continue.
Peu importent ici les normes dont on a muni $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_n[X]$ car ces espaces vectoriels sont de dimension finie.
Comme $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on en déduit que φ_1 et φ_2 coïncident sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, ce qui montre que $\boxed{\text{les polynômes caractéristiques de } AB \text{ et } BA \text{ sont égaux}}$ quelles que soient les matrices A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour les matrices élémentaires A et B données dans l'énoncé, $AB = 0$ donc $\pi_{AB} = X$, tandis que $BA = B$ d'où $\pi_{BA} \neq X$ car cette matrice est non nulle (son polynôme minimal est en fait égal à X^2), donc le résultat précédent $\boxed{\text{n'est pas vrai pour les polynômes minimaux}}$.

9) Remarquons que le résultat à démontrer est faux pour $n = 0$ car $GL_0(\mathbb{R}) = \{I_0\}$ (où I_0 est la matrice vide) est connexe par arcs. Nous supposerons désormais que $n \geqslant 1$.

Raisonnons par l'absurde en supposant que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.
Son image par l'application déterminant, qui est continue, est alors connexe par arcs.
Or puisque $n \geqslant 1$ cette image est égale à $\mathbb{R}^*$: l'inclusion directe est évidente et l'inclusion réciproque s'obtient en prenant pour antécédent d'un réel x non nul la matrice $\mathrm{diag}(x, 1, \ldots, 1) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
On voit que $\mathbb{R}^*$ n'étant pas connexe par arcs puisque ce n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$ (par exemple, $(-1, 1) \in (\mathbb{R}^*)^2$ mais $[-1, 1] \not\subset \mathbb{R}^*$), on obtient ainsi une contradiction et on en déduit que $\boxed{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ n'est pas connexe par arcs}}$.

Problème

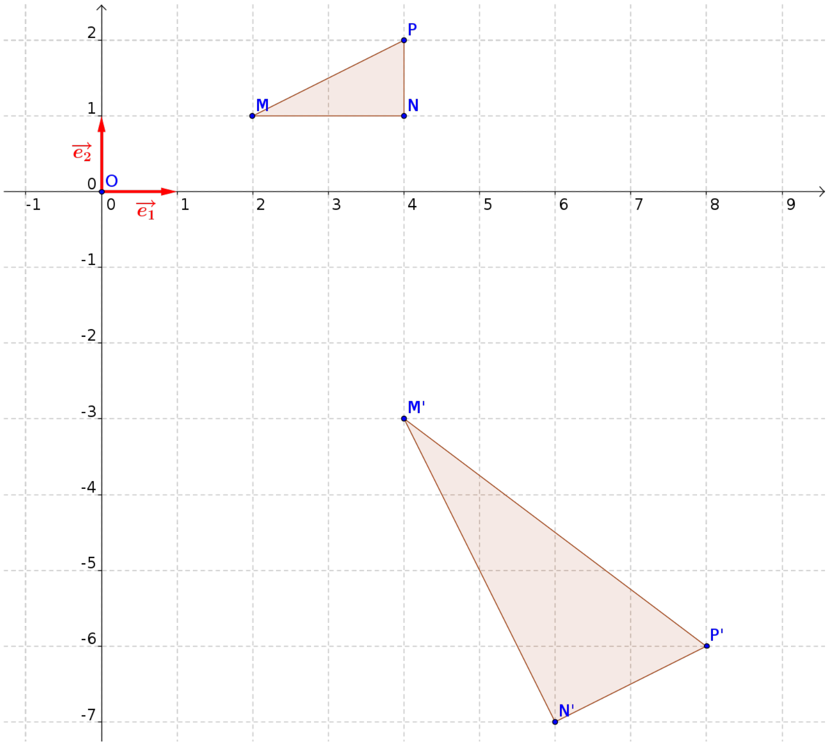
Partie I - Exemples, propriétés

10) On note u l'endomorphisme canoniquement associé à A. Par définition, pour $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $u(X) = (x + 2y, -2x + y)$ donc

$$\|u(X)\| = \sqrt{(x+2y)^2 + (-2x+y)^2} = \sqrt{x^2 + 4xy + 4y^2 + 4x^2 - 4xy + y^2} = \sqrt{5}\,\|X\|$$

On en déduit que $\boxed{u \text{ est une similitude de rapport } k = \sqrt{5}}$.

11) On a les trois points $M'(4, -3)$, $N'(6, -7)$ et $P'(8, -6)$.



Le triangle MNP étant rectangle en N, son aire vaut : $\mathscr{A}_{MNP} = \dfrac{MN \times NP}{2} = \dfrac{2 \times 1}{2} = 1$.

De même, le rectangle $M'N'P'$ est rectangle en N' car $\overrightarrow{M'N'} = (2, -4)$ et $\overrightarrow{N'P'} = (2, 1)$ et donc le produit scalaire $\overrightarrow{M'N'}.\overrightarrow{N'P'} = 4 - 4 = 0$. On en déduit que

$$\mathscr{A}_{M'N'P'} = \frac{M'N' \times N'P'}{2} = \frac{\sqrt{4+16} \times \sqrt{4+1}}{2} = 5$$

On remarque que $\boxed{\mathscr{A}_{M'N'P'} = 5\mathscr{A}_{MNP} = k^2\mathscr{A}_{MNP}, \text{ avec } k = \sqrt{5} \text{ le rapport de la similitude}}$.

Remarque : On peut aussi calculer l'aire en utilisant un déterminant relativement à la base canonique :

$$\mathscr{A}_{M'N'P'} = \left|\frac{1}{2}\det\left(\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{M'P'}\right)\right| = \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -4 & -3 \end{vmatrix}\right| = 5$$

12) Soit $u \in \mathrm{Sim}(E)$ de rapport $k > 0$.
Si $x \in \mathrm{Ker}(u)$, alors $k\|x\| = \|u(x)\| = \|0\| = 0$, donc $\|x\| = 0$ car $k \neq 0$, d'où $x = 0$ par séparation de la norme. On a donc $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$ (l'inclusion réciproque étant évidente) d'où u est injectif.

Comme u est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, on en déduit que $\boxed{u \text{ est bijectif}}$.

Montrons que $\mathrm{Sim}(E)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}(E), \circ)$.

- $\mathrm{Sim}(E) \subset \mathrm{GL}(E)$ d'après ce qui précède.
- $\mathrm{Sim}(E) \neq \emptyset$ car id_E est une similitude de rapport 1.
- **Stabilité par $\circ$:**
  Soit u et $v \in \mathrm{Sim}(E)$, de rapports respectifs k et k' dans $\mathbb{R}_+^*$.
  On a alors pour tout $x \in E$: $\|u \circ v(x)\| = \|u(v(x)\| = k\|v(x)\| = kk'\|x\|$
  Ainsi, $u \circ v$ est une similitude de rapport $kk' > 0$, ce qui montre que $\mathrm{Sim}(E)$ est stable par $\circ$.
- **Stabilité par inverse :**
  Soit $u \in \mathrm{Sim}(E)$.
  Pour tout $x \in E$: $\|x\| = \|u \circ u^{-1}(x)\| = k\|u^{-1}(x)\|$, d'où $\|u^{-1}(x)\| = \dfrac{1}{k}\|x\|$ avec $\frac{1}{k} > 0$.
  Ainsi, u^{-1} est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$, ce qui montre que $\mathrm{Sim}(E)$ est stable par inverse.

Finalement, $\mathrm{Sim}(E)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}(E), \circ)$, donc $\boxed{\mathrm{Sim}(E) \text{ est un groupe pour la loi } \circ}$.

13)
- $\boxed{\Rightarrow}$ Soit $u \in \mathrm{Sim}(E)$ de rapport $k > 0$. Soit h l'homothétie de rapport k. Elle est bijective et sa bijection réciproque est l'homothétie de rapport $\frac{1}{k}$. Posons alors $v = u \circ h^{-1}$ de sorte que $u = v \circ h$.
  Pour $x \in E$,
  $$\|v(x)\| = \|u(h^{-1}(x))\| = \left\|u\left(\frac{1}{k}x\right)\right\| = \frac{1}{k}\|u(x)\| = \|x\|$$
  Cela montre que $v \in \mathrm{O}(E)$.
  On obtient que $\boxed{u \text{ est la composée d'une homothétie vectorielle et d'un élément de } \mathrm{O}(E)}$
- $\boxed{\Leftarrow}$ Soit $u = h \circ v$ avec h une homothétie non nulle de E et $v \in \mathrm{O}(E)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ le rapport de h.
  On voit que $u \in \mathscr{L}(E)$ (car $\mathscr{L}(E)$ est stable par composition) et que pour tout $x \in E$,
  $$\|u(x)\| = \|\lambda v(x)\| = |\lambda|\,\|v(x)\| = |\lambda|\,\|x\|$$
  avec $|\lambda| > 0$, donc $\boxed{u \text{ est une similitude}}$ de rapport $|\lambda|$.

14) On pose $H = \sqrt{5}\,I_2$ qui est la matrice d'une homothétie (dans la base canonique) et $B = \dfrac{1}{\sqrt{5}}A$.

Notons v l'endomorphisme canoniquement associé à B.
L'endomorphisme u canoniquement associé à A étant une similitude de rapport $\sqrt{5}$ (question 10)), $v = \dfrac{1}{\sqrt{5}}u$ est un automorphisme orthogonal d'après la question précédente. Son déterminant est égal à 1 donc il s'agit d'une rotation de $\mathbb{R}^2$.
Son angle θ vérifie $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et $\sin\theta = -\dfrac{2}{\sqrt{5}} < 0$, donc $\theta = -\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Finalement, $\boxed{v \text{ est la rotation de } \mathbb{R}^2 \text{ d'angle } -\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$.

15) On procède par double implication

- $\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que $u \in \mathrm{O}(E)$. On sait que u préserve le produit scalaire c'est-à-dire que pour tout $(x, y) \in E^2$, $< u(x)|u(y) >=< x|y >$.
  On note $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ les matrices colonnes des coordonnées de x et de y dans $\mathscr{B}$. On sait que AX et AY sont les matrices colonnes des coordonnées de $u(x)$ et $u(y)$. Comme de plus la base $\mathscr{B}$ est orthonormée,

$$< u(x)|u(y) >= (AX)^\top (AY) = X^\top A^\top AY \text{ et } < x|y >= X^\top Y$$

  On note $\mathscr{B} = (e_1, \dots e_n)$ et, pour $i \in [\![1, n]\!]$, $E_i = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_i)$
  Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$(A^\top A)[i, j] = E_i^\top (A^\top A) E_j =< u(e_i)|u(e_j) >=< e_i|e_j >= \delta_{ij}$$

  Cela montre que $\boxed{A^\top A = I_n}$

- $\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que $A^\top A = I_n$. En gardant les notations ci-dessus, pour $x \in E$

$$\|u(x)\|^2 =< u(x)|u(x) >= (AX)^\top (AX) = X^\top A^\top AX = X^\top X =< x|x >= \|x\|$$

  On en déduit que que $\|u(x)\| = \|x\|$ puis que $\boxed{\text{l'endomorphisme } u \text{ appartient bien à } \mathrm{O}(E)}$

D'après la question 13, A est une matrice de similitude de rapport $k > 0$ si et seulement $\frac{1}{k}A$ est une matrice d'une isométrie vectorielle ce qui revient à $\boxed{A^\top A = k^2 I_n}$.

16) Notons u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.
Après calculs on trouve $A^\top A = 9I_3$, donc d'après la question précédente et le caractère orthonormé de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $\boxed{u \text{ est une similitude de rapport } 3}$.

La matrice de la similitude u^{-1} est $A^{-1} = \dfrac{1}{9} A^\top = \boxed{\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}}$.

Soit $f \in \mathrm{O}(E)$, de matrice M dans la base canonique.
La matrice de $u^{-1} \circ f \circ u$ dans la base canonique est $N = A^{-1}MA = \dfrac{1}{9} A^\top MA$. Calculons $N^\top N$.

$$\begin{aligned} N^\top N &= \frac{1}{81} A^\top M^\top A^\top AMA \\ &= \frac{1}{9} A^\top M^\top MA && \text{car } A^\top A = A \times 9A^{-1} = 9I_3 \\ &= \frac{1}{9} A^\top A && \text{car } M \top M = I_3, \text{ puisque } f \in \mathrm{O}(E) \\ &= I_3 && \text{car } A^\top A = 9I_3. \end{aligned}$$

La base canonique est orthonormée, donc, grâce à la question 15), $\boxed{u^{-1} \circ f \circ u \in \mathrm{O}(E)}$.

Remarque : le résultat prouvé est vrai pour toute similitude et pas juste pour la similitude de cet exemple.

17) On note $S(x, r)$ la sphère de centre $x \in E$ et de rayon $r > 0$.
Soit u un endomorphisme de E possédant la propriété de l'énoncé. En particulier, l'image par u de $S(0, 1)$ est égale à $S(0, k)$ pour un certain $k > 0$. Montrons que u est une similitude de rapport k.
Soit $x \in E \backslash \{0\}$. Le vecteur $\dfrac{x}{\|x\|}$ est de norme 1, donc il appartient à $S(0, 1)$. On en déduit

que son image par u appartient à $S(0,k)$, d'où $\left\| u\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\right\| = k$.

Or $\left\| u\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \left\|\dfrac{1}{\|x\|}u(x)\right\| = \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|}$, d'où $\|u(x)\| = k\|x\|$, cette dernière égalité restant valable lorsque x est le vecteur nul.
Nous avons ainsi montré que $\boxed{u \text{ est une similitude de } E}$.

Partie II - Assertions équivalentes

18) Soient x et y dans E.

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 = \langle x+y|x+y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x|y\rangle + \|y\|^2\\ \|x-y\|^2 = \langle x-y|x-y\rangle = \|x\|^2 - 2\langle x|y\rangle + \|y\|^2\end{aligned}$$

d'où par différence : $\boxed{\langle x|y\rangle = \dfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)}$ (formule de polarisation).

Soit u une similitude de E de rapport $k > 0$. Soit $(x,y) \in E^2$, on utilise les formules de polarisation :

$$\begin{aligned}\langle u(x)|u(y)\rangle &= \frac{1}{2}\left(\|u(x)+u(y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\|u(x+y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(k^2\|u(x+y)\|^2 - k^2\|u(x)\| - k^2\|u(y)\|\right)\\ &= \frac{k^2}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)\\ &= k^2\langle x|y\rangle\end{aligned}$$

Réciproquement, si u est un endomorphisme de E tel que pour $(x,y) \in E^2$, $\langle u(x)|u(y)\rangle = k^2\langle x|y\rangle$ avec $k > 0$, alors,

$$\|u(x)\| = \sqrt{\|u(x)\|^2} = \sqrt{\langle u(x)|u(x)\rangle} = \sqrt{k^2\langle x|x\rangle} = k\|x\|$$

19)
- $\boxed{\Rightarrow}$ Soit $u \in \mathrm{Sim}(E)$ de rapport k. Soit x et y dans E tels que $\langle x|y\rangle = 0$.
D'après la question précédente, $\langle u(x)|u(y)\rangle = k^2\langle x|y\rangle = 0$. Ainsi, $\boxed{u \text{ conserve l'orthogonalité}}$
- $\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que u est un endomorphisme qui conserve l'orthogonalité. On suppose **de plus** que u n'est pas nul (cela aurait du être écrit dans l'énoncé).
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Soit i et j dans $[\![1,n]\!]$.

$$\langle e_i + e_j|e_i - e_j\rangle = \|e_i\|^2 - \|e_j\|^2 = 1 - 1$$

On en déduit que $\boxed{\langle e_i + e_j|e_i - e_j\rangle = 0}$.

Comme u préserve l'orthogonalité, on a aussi $\langle u(e_i+e_j)|u(e_i-e_j)\rangle$, ce qui donne par linéarité de u : $\langle u(e_i)+u(e_j)|u(e_i)-u(e_j)\rangle = 0$, donc $\|u(e_i)\|^2 - \|u(e_j)\|^2 = 0$, d'où $\boxed{\|u(e_i)\| = \|u(e_j)\|}$

Soit k la valeur commune des $\|u(e_i)\|$, $i \in [\![1,n]\!]$. Comme on a supposé que u n'était pas nul, $k > 0$.

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\|u(e_i)\| = k$ et $\|e_i\| = 1$, d'où $\boxed{\|u(e_i)\| = k\|e_i\|}$ (cette égalité, bien que demandée par l'énoncé, n'est d'aucune utilité pour la suite).

Soit $x \in E$ on pose $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Par linéarité, $u(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i)$.
Les vecteurs e_i étant deux à deux orthogonaux, il en est de même des $u(e_i)$ car u conserve l'orthogonalité, donc d'après le théorème de Pythagore :

$$\|u(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \|u(e_i)\|^2 = k^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = k^2 \|x\|^2$$

La dernière égalité ci-dessus provient du caractère orthonormé de la base $\mathscr{B}$. Finalement $\|u(x)\| = k\|x\|$.
On a ainsi montré que $\boxed{u \text{ est une similitude de rapport } k}$

20) Soit x et y dans E et λ dans $\mathbb{R}$. On veut montrer que le vecteur $z = \lambda u(x) + u(y) - u(\lambda x + y)$ est nul.

$$\begin{aligned}
\|z\|^2 &= \langle \lambda u(x) + u(y) - u(\lambda x + y) | \lambda u(x) + u(y) - u(\lambda x + y) \rangle \\
&= \|\lambda u(x) + u(y)\|^2 - 2\langle \lambda u(x) + u(y) | u(\lambda x + y) \rangle + \|u(\lambda x + y)\|^2 \\
&= \lambda^2 \|u(x)\|^2 + 2\lambda \langle u(x) | u(y) \rangle + \|u(y)\|^2 - 2\lambda \langle u(x) | u(\lambda x + y) \rangle \\
&\quad -2\langle u(y) | u(\lambda x + y) \rangle + k^2 \|\lambda x + y\|^2 \\
&= \lambda^2 k^2 \|x\|^2 + 2\lambda k^2 \langle x|y \rangle + k^2 \|y\|^2 - 2\lambda k^2 \langle x | \lambda x + y \rangle \\
&\quad -2k^2 \langle y | \lambda x + y \rangle + k^2 \lambda^2 \|x\|^2 + 2k^2 \lambda \langle x|y \rangle + k^2 \|y\|^2 \\
&= k^2 (\lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda \langle x|y \rangle + \|y\|^2 - 2\lambda^2 \|x\|^2 - 2\lambda \langle x|y \rangle - 2\lambda \langle x|y \rangle \\
&\quad -2\|y\|^2 + \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda \langle x|y \rangle + \|y\|^2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

d'où $z = 0$ et par suite $u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)$, ce qui montre que $\boxed{u \text{ est un endomorphisme de } E}$.

On en déduit que $\boxed{u \text{ est une similitude de } E}$ en utilisant la question 18)