Exercice I

Soit d un entier strictement positif. On note $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles de taille d et I_d désigne la matrice identité.

I - Préliminaire

On se fixe une norme N sur l'ensemble $\mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes et on note
$S = \{X \in \mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{R}) \,|N(X) = 1\}$.

1) Soit $A \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$. Justifier que la fonction $\theta : X \mapsto N(AX)$ admet un maximum quand $X \in S$.

On pose alors $\|A\| = \max\limits_{X \in S} N(AX)$.

2) Montrer que $\|.\|$ est une norme sur $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$.
3) Montrer que pour tout $X \in \mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{R})$, $N(AX) \leqslant \|A\|N(X)$ et en déduire que pour A et B dans $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$, $\|AB\| \leqslant \|A\|.\|B\|$

Dans toute la suite, on considère une telle norme $\|.\|$ sur $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$.

– II –

4) Soit $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ qui converge vers $D \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$. Elle est donc bornée et on note $\lambda > 0$ tel que pour tout entier n, $\|D_n\| \leqslant \lambda$.
   a) Soit $k \in \mathbb{N}$, on pose pour $n \geqslant k$ et $n \geqslant 1$, $u_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!n^k}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n,k} = 1$ et que
   $$0 \leqslant 1 - u_{n,k} \leqslant 1.$$
   b) En déduire que pour $n \geqslant 1$,
   $$\left\| \left(I_d + \frac{D_n}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} D_n^k \right\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} - \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n$$
   puis que
   $$\lim_{n\to+\infty} \left(\left(I_d + \frac{D_n}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} D_n^k \right) = 0.$$
   c) Montrer que pour $k \geqslant 1$ et $n \geqslant 0$,
   $$\|D_n^k - D^k\| \leqslant k\lambda^{k-1}\|D_n - D\|.$$
   On pourra procéder par récurrence.
   d) Conclure que $\left(I_d + \dfrac{D_n}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(D)$.
5) Montrer qu'il existe une constante $\mu > 0$ telle que pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ telle que $\|M\| \leqslant 1$
   $$\|\exp(M) - I_d - M\| \leqslant \mu\|M\|^2.$$
6) Soit A, B deux matrices de $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$.
   a) Montrer que pour tout entier n non nul il existe une matrice C_n telle que
   $$\exp\left(\frac{A}{n}\right) \exp\left(\frac{B}{n}\right) = I_d + \frac{A}{n} + \frac{B}{n} + C_n$$
   et que $\|C_n\| = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
   b) En déduire que
   $$\exp(A + B) = \lim_{n\to+\infty} \left(\exp\left(\frac{A}{n}\right) \exp\left(\frac{B}{n}\right)\right)^n.$$

Exercice II

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul
Le but de l'exercice est de déterminer des critères afin de déterminer si une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est définie positive.

I - Un critère pour $n = 2$

Dans cette partie, on souhaite démontrer la caractérisation suivante :
Une matrice symétrique $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est définie positive si et seulement si sa trace et son déterminant sont strictement positifs.

1) Démontrer qu'une matrice définie positive M de taille quelconque vérifie toujours $\mathrm{tr}(M) > 0$ et $\det(M) > 0$.
2) Démontrer qu'une matrice symétrique $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, dont la trace et le déterminant sont strictement positifs, est définie positive.
3) Le résultat de la question précédente reste-t-il vrai pour les matrices symétriques de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?

II - Le critère de Sylvester

Dans cette partie, on étudie le critère de Sylvester, valable en toute dimension.
Pour une matrice carrée quelconque $M = (m_{i,j})_{i,j\in[\![1,n]\!]} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et un entier $k \in [\![1, n]\!]$, on définit le k-ième mineur principal δ_k comme étant le déterminant de la matrice $M_k = (m_{i,j})_{i,j\in[\![1,k]\!]} \in \mathscr{M}_k(\mathbb{R})$.
On précise qu'une matrice carrée de taille n possède n mineurs principaux.
On dit qu'une matrice vérifie le critère de Sylvester si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs. On souhaite alors démontrer la caractérisation suivante : une matrice symétrique réelle est définie positive si et seulement si elle vérifie le critère de Sylvester.

4) On fixe une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, un entier $k \in [\![1, n]\!]$, ainsi qu'un vecteur colonne non nul $X_k = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{k,1}(\mathbb{R})$. Determiner un vecteur colonne $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$, tel que

$$X_k^\top M_k X_k = X^\top M X$$

5) Démontrer que toute matrice symétrique réelle définie positive vérifie le critère de Sylvester.

Dans les deux questions suivantes, il s'agit de démontrer la réciproque, c'est-à-dire que toute matrice symétrique réelle vérifiant le critère de Sylvester est définie positive. Pour cela, on va raisonner par récurrence sur la taille n de la matrice.

6) Soit $n \geqslant 2$ et soit une matrice symétrique $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\det(M) > 0$. On écrit cette matrice par blocs sous la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} M_{n-1} & U \\ U^\top & \alpha \end{pmatrix} \text{ avec } M_{n-1} \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R}), \quad U \in \mathscr{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}) \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}.$$

   On suppose que la matrice M_{n-1} est définie positive.
   Justifier l'existence d'un vecteur colonne $V \in \mathscr{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ tel que $M_{n-1}V + U = 0$.
   En notant $Q = \begin{pmatrix} I_{n-1} & V \\ 0_{1,n-1} & 1 \end{pmatrix}$, démontrer alors que $Q^\top M Q$ s'écrit par blocs $\begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & \beta \end{pmatrix}$ avec $\beta > 0$.
7) Démontrer par récurrence que toute matrice symétrique réelle vérifiant le critère de Sylvester est définie positive.