Exercice I

I - Préliminaires

1) Soit $A \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$. La fonction $X \mapsto AX$ de $\mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{R})$ dans lui même est linéaire donc continue et $N : \mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est continue (car 1-lipschitzienne). On en déduit que $\theta : X \mapsto N(AX)$ est continue. Maintenant, comme $\mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie, la sphère unité S est compacte car elle est fermée et bornée.

   D'après le théorème des bornes atteintes, la restriction de la fonction θ à S est bornée et atteint ses borne.

2) Montrons que $\|.\|$ est une norme sur $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$.
   - Soit $A \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$. Pour tout $X \in \mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{R})$, $\theta(X) \geqslant 0$ donc $\|A\| \geqslant 0$.
   - Soit $A \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ tel que $\|A\| = 0$. On a que pour tout $X \in S$, $\theta(X) = 0$ donc $AX = 0$. On en déduit que $AX = 0$ pour tout $X \in \mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{R})$ en remarquant que si X n'est pas nul, $AX = N(X)A\frac{X}{N(X)}$.
     Finalement $A = 0$.
   - Soit $A \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $X \in S$, $N(\lambda AX) = |\lambda| N(AX)$. On en déduit que
   $$\|\lambda A\| = \max_{X \in S} N(\lambda AX) = \max_{X \in S} |\lambda| N(AX) = |\lambda| \max_{X \in S} N(AX) = |\lambda| \|A\|.$$
   - Soit A et B dans $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$, pour tout $X \in S$, $N((A+B)X) = N(AX+BX) \leqslant N(AX) + N(BX)$ et donc
   $$\|A+B\| = \max_{X \in S} N((A+B)X) \leqslant \max_{X \in S}(N(AX) + N(BX)) \leqslant \|A\| + \|B\|.$$

   Finalement $\boxed{\|.\| \text{ est une norme sur } \mathscr{M}_d(\mathbb{R}).}$

3) Soit $X \in \mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{R})$.
   Si $X = 0$, on a bien $N(AX) \leqslant \|A\| N(X)$.
   Si $X \neq 0$, on pose $Y = \frac{X}{N(X)}$ et on a $N(AY) \leqslant \|A\|$ car $\|Y\| = 1$. Par linéarité, $N(AX) = N(X)N(AY) \leqslant \|A\| N(X)$.
   De ce fait, pour A et B dans $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ et $X \in S$,
   $$N((AB)X) = N(A(BX)) \leqslant \|A\| N(BX) \leqslant \|A\|.\|B\|.$$
   On en déduit que $\boxed{\|AB\| \leqslant \|A\|.\|B\|.}$

– II –

4) Soit $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ qui converge vers $D \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$. Elle est donc bornée et on note $\lambda > 0$ tel que pour tout entier n, $\|D_n\| \leqslant \lambda$.
   a) Soit $k \in \mathbb{N}$, on pose pour $n \geqslant k$ et $n \geqslant 1$,
   $$u_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!n^k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n-k+i}{n}.$$
   Or pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $\frac{n-k+i}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$ donc $\boxed{u_{n,k} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1}$.

   De plus, comme pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $\frac{n-k+i}{n} \in [0, 1]$, $u_{n,k} \in [0, 1]$ et donc $\boxed{0 \leqslant 1 - u_{n,k} \leqslant 1.}$

b) Remarquons que parmi les résultats de la question précédente, seule la positivité des $1-u_{n,k}$ sera utilisée.

$$\begin{aligned}
\left\|\left(I_d+\frac{D_n}{n}\right)^n-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}D_n^k\right\| &= \left\|\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}-\frac{1}{k!}\right)D_n^k\right\| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}|u_{n,k}-1|\ \|D_n^k\| \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}(1-u_{n,k})\ \|D_n^k\| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}(1-u_{n,k})\ \|D_n\|^k
\end{aligned}$$

En effet, on a $\|D_n^0\|=\|I_d\|=\max_{X\in S}N(I_dX)=\max_{X\in S}1=1$, et comme $\|.\|$ est sous-multiplicative, on en déduit par récurrence que pour tout naturel k (y compris zéro), $\|D_n^k\|\leqslant\|D_n\|^k$.
Ainsi

$$\begin{aligned}
\left\|\left(I_d+\frac{D_n}{n}\right)^n-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}D_n^k\right\| &\leqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}(1-u_{n,k})\lambda^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\lambda^k-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}u_{n,k}\lambda^k \\
&= \boxed{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\lambda^k-\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^n}
\end{aligned}$$

Or $\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^n=e^{n\ln(1+\frac{\lambda}{n})}=e^{n(\frac{\lambda}{n}+o(1/n))}=e^{\lambda+o(1)}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}e^\lambda$ par continuité de l'exponentielle (et car $\lambda+o(1)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\lambda+0=\lambda$).
De plus $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\lambda^k\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\lambda$ (par définition de l'exponentielle).
Ainsi, $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\lambda^k-\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\lambda-\lambda=0$, et donc par encadrement,

$$\left\|\left(I_d+\frac{D_n}{n}\right)^n-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}D_n^k\right\|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

et donc

$$\boxed{\left(I_d+\frac{D_n}{n}\right)^n-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}D_n^k\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0_{\mathcal{M}_d(\mathbb{K})}}$$

c) Soit $n\geqslant 0$.

$$\|D_n^1-D^1\|=1\lambda^{1-1}\|D_n-D\|.$$

Soit $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $\|D_n^k-D^k\|\leqslant k\lambda^{k-1}\|D_n^k-D^k\|$.

$$\begin{aligned}
\|D_n^{k+1}-D^{k+1}\| &= \|D_n^k(D_n-D)+(D_n^k-D^k)D\| \\
&\leqslant \|D_n^k\|.\|D_n-D\|+\|D_n^k-D^k\|.\|D\| \text{ par inégalité triangulaire} \\
&\qquad \text{et sous-multiplicativité de } \|.\| \\
&\leqslant \|D_n\|^k.\|D_n-D\|+\|D_n^k-D^k\|.\|D\| \text{ (voir question précédente)}
\end{aligned}$$

Or par continuité de $\|.\|$ et par passage aux limites dans les inégalités larges, on a :

$$\|D\| = \|\lim_{n\to\infty} D_n\| = \lim_{n\to n\infty} \|D_n\| \leqslant \lambda$$

Ainsi, en utilisant l'hypothèse de récurrence,

$$\|D_n^{k+1} - D^{k+1}\| \leqslant \lambda^k \|D_n - D\| + k\lambda^{k-1}\|D_n - D\|\lambda = (k+1)\lambda^k\|D_n - D\|$$

Par récurrence, $\boxed{\|D_n^k - D^k\| \leqslant k\lambda^{k-1}\|D_n^k - D^k\| \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*}$.

d) On a donc

$$\begin{aligned}
\|\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}D_n^k - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}D^k\| &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\|D_n^k - D^k\| \text{ car } D_n^0 - D^0 = I_d - I_d = 0\\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}k\lambda^{k-1}\|D_n - D\|\\
&= \sum_{p=0}^{n-1}\frac{\lambda^p}{p!}\|D_n - D\|\\
&\leqslant e^\lambda\|D_n - D\| \quad \text{car les sommes partielles d'une série}\\
&\qquad \text{à termes positifs sont inférieures ou égales à sa somme.}
\end{aligned}$$

Or $e^\lambda\|D_n - D\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^\lambda 0 = 0$. Par encadrement $\|\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}D_n^k - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}D^k\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\boxed{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}D_n^k - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}D^k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0}$.

On en déduit grâce à la question b) que :

$$\boxed{\left(I_d + \frac{D_n}{n}\right)^n = \left(I_d + \frac{D_n}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}D_n^k + \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}D_n^k - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}D^k + \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}D^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 + 0 + \exp(D).}$$

5) Soit $M \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ telle que $\|M\| \leqslant 1$

$$\|\exp(M) - I_d - M\| = \|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}M^k\| \leqslant \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}\|M\|^k = \varphi(\|M\|)\|M\|^2$$

où $\varphi : t \mapsto \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}t^{k-2}$ est une fonction développable en série entière sur $\mathbb{R}$ donc est continue sur $\mathbb{R}$ et ainsi bornée sur tout segment donc $\boxed{\text{majorée sur } [0,1] \text{ par une constante } \mu}$.

On pouvait aussi appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange (dans une version sans valeurs absolues) à la fonction exponentielle réelle (en remarquant que $\|M\|^2\varphi(\|M\|) = e^{\|M\|} - 1 - \|M\| \leqslant \mu\|M\|^2$ avec $\boxed{\mu = \frac{1}{2!}\sup_{[0,1]}\exp'' = \frac{e}{2}}$).

6) Soit A, B deux matrices de $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$.

a) D'après la question précédente, posant $M_n = \exp(A/n) - I - \frac{A}{n}$ et $N_n = \exp(B/n) - I - \frac{B}{n}$ on a :

$$\exp\left(\frac{A}{n}\right)\exp\left(\frac{B}{n}\right) = (I_d + \frac{A}{n} + M_n)(I_d + \frac{B}{n} + N_n)$$

avec $\|M_n\| \leqslant \mu\frac{\|A\|^2}{n^2}$ pour $n > \|A\|$ et $\|N_n\| \leqslant \mu\frac{|B\|\|^2}{n^2}$ pour $n > \|B\|$.

$$\exp\left(\frac{A}{n}\right)\exp\left(\frac{B}{n}\right) = I + \frac{A}{n} + \frac{B}{n} + C_n$$

où C_n est une somme de six termes.

Pour $n > \max(\|A\|, \|B\|)$,

$$\|C_n\| \leqslant \frac{1}{n^2}(\|A\|.\|B\| + \|A\|\frac{\mu}{n} + \|B\|\frac{\mu}{n} + \|I\|\mu + \|I\|\mu + \frac{\mu^2}{n^2}) \leqslant \frac{\|A\|.\|B\| + \mu(\|A\| + \|B\| + 2 + \mu)}{n^2}$$

Ainsi $\boxed{\|C_n\| = O(1/n^2)}$.

b)

$$\left(\exp\left(\frac{A}{n}\right)\exp\left(\frac{B}{n}\right)\right)^n = \left(I + \frac{A + B + nC_n}{n}\right)^n$$

Posant $D_n = A + B + nC_n$, on a $D_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A + B$ car $\|nC_n\| = O(1/n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Par la question 9), on a donc

$$\boxed{\left(\exp\left(\frac{A}{n}\right)\exp\left(\frac{B}{n}\right)\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp(A + B).}$$

Exercice II

I - Un critère pour $n = 2$

1) Soit $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
Par le théorème spectral et la caractérisation spectrale des éléments de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que S soit (orthogonalement) semblable à une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
Ainsi $\boxed{\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n > 0 \text{ et } \det(M) = \lambda_1. \ldots .\lambda_n > 0.}$

2) Soit $M \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. Par le théorème spectral, M est semblable à une matrice diagonale téelle $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.
Supposons que $\mathrm{tr}(M) > 0$ et que $\det(M) > 0$. Alors $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$ et $\lambda_1\lambda_2 > 0$. Ainsi λ_1 et λ_2 sont tous non nuls et de même signe, et leur somme est positive, donc (par l'absurde) ils sont tous deux strictement positifs.
Par la caractérisation spectrale des éléments de $\mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$, on a $\boxed{M \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R}).}$

3) Le résultat de la question précédente $\boxed{\text{ne s'étent pas}}$ aux les matrices symétriques de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Par exemple, la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est symétrique, sa trace est $1 > 0$ et sont déterminant est $3 > 0$, mais elle n'appartient pas à $\mathcal{S}_3^{++}(\mathbb{R})$ car ses valeurs propres ne sont pas toutes strictement positives puisque -1 est valeur propre.

II - Le critère de Sylvester

4) On fixe une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, un entier $k \in [\![1, n]\!]$, ainsi qu'un vecteur colonne non nul $X_k = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{k,1}(\mathbb{R})$.

Posons $\boxed{X = \begin{pmatrix} X_k \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Alors
$$X^\top M X = (X_k^\top \mid 0)\begin{pmatrix} M_k X_k \\ ? \end{pmatrix} = X_k^\top M_k X_k$$

5) Soit $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Soit $X_k \in \mathscr{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ non nul. Dans les notations précédentes,
$$X_k^\top M_k X_k = X^\top M X > 0$$
car X n'est pas nul.
De plus M_k est symétrique. Donc $M_k \in \mathcal{S}_k^{++}(\mathbb{R})$.
Par la question 1) on a $\det(M_k) > 0$.
Donc $\boxed{M \text{ vérifie le critère de Sylvester}}$.

6) Soit $n \geqslant 2$ et soit une matrice symétrique $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\det(M) > 0$. On écrit cette matrice par blocs sous la forme suivante :
$$M = \begin{pmatrix} M_{n-1} & U \\ U^\top & \alpha \end{pmatrix} \text{ avec } M_{n-1} \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R}), \quad U \in \mathscr{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}) \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}.$$
On suppose que la matrice M_{n-1} est définie positive.
Comme les valeurs propres de M_{n-1} sont toutes strictement positives, 0 n'est pas valeur propre de M_{n-1} donc $\boxed{M_{n-1} \text{ est inversible}}$. Ainsi il existe un vecteur colonne $V \in \mathscr{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ tel que $M_{n-1}V + U = 0$, à savoir $\boxed{V = -M_{n-1}^{-1}U.}$
En notant $Q = \begin{pmatrix} I_{n-1} & V \\ 0_{1,n-1} & 1 \end{pmatrix}$,
$$Q^\top M Q = \begin{pmatrix} I & 0 \\ V^T & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_{n-1} & 0 \\ U^\top & U^\top V + \alpha \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} M_{n-1} & 0 \\ V^\top M_{n-1} + U^\top & U^\top V + \alpha \end{pmatrix}}$$
Or puisque M_{n-1} est symétrique,
$$V^\top M_{n-1} + U^\top = V^\top M_{n-1}^\top + U^\top = (M_{n-1}V + U)^\top = 0_{n-1,1}^\top = \boxed{0_{1,n-1}}$$
Posant $\beta = U^\top V + \alpha$, on a
$$\det(Q^\top M Q) = \begin{cases} \det(M) & \text{d'une part, car } \det(Q) = 1 \\ \beta \det(M_{n-1}) & \text{d'autre part} \end{cases}$$
Comme $\det M > 0$ par hypothèse, et comme $\det(M_{n-1}) > 0$ car M_{n-1} est supposée définie positive, on en déduit que $\boxed{\beta > 0}$ comme quotient de deux réels strictement positifs.

7) Démontrons par récurrence sur n que toute matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant le critère de Sylvester est définie positive.
La propriété est triviale au rang 0 et la vérification au rang 1 est immédiate : si $\det((a)) > 0$ alors $a > 0$ donc $(a) \in \mathcal{S}_1^{++}$.
Soit $n \geqslant 2$. Supposons la propriété vraie au rang $n-1$. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant le critère de Sylvester.
Alors $\det(M) = \det(M_n) > 0$ et M_{n-1} vérifie le critère de Sylvester car les mineurs principaux de M_{n-1} sont des mineurs principaux de M.
Par hypothèse de récurrence, $M_{n-1} \in \mathcal{S}_{n-1}^{++}$.
Posons $M' = Q^\top M Q$ (dans les notations de la question précédente). Alors $\boxed{M' \text{ est symétrique}}$ car $M'^\top = Q^\top M^\top (Q^\top)^\top = M'$ car M est symétrique.

De plus pour tout $X = \begin{pmatrix} X_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul on a :

$$X^\top M' X = X_{n-1}^\top M_{n-1} X_{n-1} + \beta x_n^2 > 0$$

comme somme de deux réels positifs non tous nuls.
Donc $\boxed{M' \text{ est définie positive.}}$
Soit $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul. Posons $X = Q^{-1}Y$.

$$Y^\top MY = X^\top M' X > 0$$

car $X \neq 0$ (car sinon $Y = QX = 0$).
Donc $\boxed{M \text{ est définie positive.}}$