Exercice I

1) Soit $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ et $y = \sum_{i=1}^{q} \mu_i y_i$ deux combinaisons convexes. Soit $t \in [0,1]$,

$$tx + (1-t)y = t\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i + (1-t)\sum_{i=1}^{q} \mu_i y_i = \sum_{i=1}^{p+q} \gamma_i z_i$$

où, pour tout $i \in [\![1\,;\, p+q]\!]$,

$$\gamma_i = \begin{cases} t\lambda_i & \text{si } \; i \leqslant p \\ (1-t)\mu_i & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad z_i = \begin{cases} x_i & \text{si } \; i \leqslant p \\ y_i & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme

$$\sum_{i=1}^{p+q} \gamma_i = t\sum_{i=1}^{p} \lambda_i + (1-t)\sum_{i=1}^{q} \mu_i = t + (1-t) = 1$$

on en déduit que $tx + (1-t)y \in \mathrm{Conv(H)}$. Ce dernier est donc convexe.

Soit Z une partie convexe de E contenant H, $\mathrm{Conv(H)} \subset Z$. En effet soit $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ un élément de Conv(H). Par hypothèse, pour tout i compris entre 1 et p, $x_i \in H$ donc $x_i \in Z$. Comme de plus Z étant convexe elle est stable par combinaison convexe, on en déduit que $x \in Z$. Finalement $\mathrm{Conv(H)} \subset Z$.

2) a) On pose pour tout $i \in [\![2\,;\, p]\!]$, $u_i = x_i - x_1$. C'est une famille de $p-1$ vecteurs de E. Comme $p-1 \geqslant n+1 > \dim E$, la famille est liée. Il existe donc $(\mu_2, \ldots, \mu_p) \neq (0, \ldots, 0)$ tels que $\sum_{i=2}^{p} \mu_i u_i = 0$. Cela implique que

$$\sum_{i=2}^{p} \mu_i x_i - \left(\sum_{i=2}^{p}\right) \mu_i x_1 = 0$$

On pose donc $\mu_1 = -\sum_{i=2}^{p} \mu_i$ et on a donc :

$$\sum_{i=1}^{p} \mu_i x_i = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{p} \mu_i = 0.$$

De plus $(\mu_1, \ldots, \mu_n) \neq (0, \ldots, 0)$ par construction.

b) On a alors, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i - \theta\sum_{i=1}^{p} \mu_i x_i = \sum_{i=1}^{p} (\lambda_i - \theta\mu_i) x_i$$

Il faut alors choisir θ tel que l'un des termes $\lambda_i - \theta\mu_i$ soit nul et que les autres soient positifs (ou nuls). Pour cela on considère $I = \{i \in [\![1\,;\, p]\!] \;,\; \mu_i > 0\}$ qui n'est pas un ensemble vide car la somme des μ_i est nulle et ils ne sont pas tous nuls. On pose alors $\theta = \min_{i \in I} \dfrac{\lambda_i}{\mu_i}$. En notant i_0 un élément de I tel que $\theta = \dfrac{\lambda_{i_0}}{\mu_{i_0}}$, on a $\lambda_{i_0} - \theta\mu_{i_0}$ par définition de θ.

Maintenant, pour $i \in [\![1\,;\, p]\!]$:

— Si $i \notin I$, $\mu_i \leqslant 0$, comme $\theta \geqslant 0$, $\lambda_i - \theta\mu_i \geqslant \lambda_i \geqslant 0$.
— Si $i \in I$, $\theta \leqslant \frac{\lambda_i}{\mu_i}$ et donc, en multipliant par μ_i qui est positif, $\lambda_i - \theta\mu_i \geqslant 0$.
On a finalement,

$$x = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ i \neq i_0}} (\lambda_i - \theta\mu_i) x_i$$

et

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ i \neq i_0}} (\lambda_i - \theta\mu_i) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} (\lambda_i - \theta\mu_i) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} \lambda_i - \theta \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} \mu_i = 1$$

Cela montre que x est une combinaison convexe d'au plus $p-1$ éléments de H. On peut alors recommencer tant que $p \geqslant n+2$. On en déduit finalement que x est une combinaison convexe d'au plus $n+1$ éléments de H et donc Conv(H) est constituée des combinaisons convexes d'au plus $n+1$ éléments de H.

3) a) Montrons que Δ est compact. L'espace $\mathbb{R}^{n+1}$ étant de dimension finie, il suffit de montrer que Δ est fermé est borné.
— On remarque que $\Delta \subset [0,1]^{n+1}$ et donc Δ est borné.
— Soit $i \in [\![1\,;\, n+1]\!]$, l'application $\varphi_i : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ qui associe à $(t_1, \dots, t_{n+1})$ sa composante t_i est continue car linéaire (l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$ est de dimension finie). Cela implique que $F_i = \left\{(t_1, \dots, t_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}\ ,\ t_i \geqslant 0\right\} = \varphi_i^{-1}([0, +\infty[)$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

De même, $\psi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ qui associe à $(t_1, \dots, t_{n+1})$ la somme $\sum\limits_{i=1}^{n+1} t_i$ est continue car linéaire (l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$ est de dimension finie). Cela implique que $G = \left\{(t_1, \dots, t_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}\ ,\ \sum\limits_{i=1}^{n+1} t_i = 1\right\} = \psi^{-1}(\{1\})$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

Cela implique que $\Delta = \left(\bigcap_{i=1}^{n+1} F_i\right) \cap G$ est fermé comme intersection de fermé.

On en déduit que Δ est une partie compacte de $\mathbb{R}^{n+1}$.

b) Soit

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & \mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1} & \to & E \\ & ((t_1, \dots, t_{n+1}), (x_1, \dots, x_{n+1})) & \to & \sum\limits_{i=1}^{n+1} t_i x_i \end{array}$$

On considère N_1 la norme produit sur $\mathbb{R}^{n+1}$ et N_2 celle sur E^{n+1}. L'application Φ est bilinéaire et pour $u = ((t_1, \dots, t_{n+1}), (x_1, \dots, x_{n+1})) \in \mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1}$,

$$|\Phi(u)| \ \leqslant\ (n+1) N_1(t_1, \dots, t_{n+1}) \times N_2(x_1, \dots, x_{n+1})$$

Cela implique que Φ est continue.
De plus, on remarque que Conv(H) est l'image de $\Delta \times H^{n+1}$ par Φ. Le fait que $\Delta \times H^{n+1}$ soit compact comme produit de compact implique alors que Conv(H) est compact.

Exercice II

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni d'une norme $\|.\|$.

1) Soit F un sous-espace de dimension finie de E. Soit $x \in E \backslash F$. On pose $\delta = d(x, F)$. On rappelle que δ est le plus grand minorant de l'ensemble $\{d(x, f)\ ,\ f \in F\}$. Il se peut que δ n'appartienne pas à cet ensemble.

   a) Montrer que $\delta > 0$.

   Raisonnons par l'absurde en supposant que δ soit nul. Alors pour tout δ' strictement positif, δ' ne serait pas un minorant de $\{d(x, f)\ ,\ f \in F\}$ donc il existerait un élément f de F tel que $d(x, f) < \delta'$. Toute boule ouverte centrée en x rencontrerait donc F donc x serait un point adhérent à F. Comme F est de dimension finie, il est fermé, donc x appartiendrait à F, ce qui est contradictoire.

   b) Montrer qu'il existe un élément f de F tel que $\|x - f\| \leqslant 2\delta$.

   Comme $2\delta > \delta$ (car $\delta > 0$), 2δ n'est pas un minorant de $\{d(x, f)\ ,\ f \in F\}$ donc il existe un élément f de F tel que $d(x, f) < 2\delta$.

   c) On pose $u = \dfrac{x - f}{\|x - f\|}$. Montrer que $d(u, F) \geqslant \frac{1}{2}$.

   Soit $g \in F$,
$$\|u - g\| = \frac{1}{\|x - f\|} \Big\| x - f - \|x - f\| g \Big\| \geqslant \frac{\delta}{\|x - f\|}$$
   La dernière inégalité vient du fait que $f + \|x - f\| g \in F$ car F est un sous-espace vectoriel de E. On en déduit que
$$\|u - g\| \geqslant \frac{\delta}{2\delta} = \frac{1}{2}$$
   Cela implique que $d(u, F) \geqslant \frac{1}{2}$.

2) On suppose E de dimension infinie. On note $B = \overline{B}(0_E, 1)$ la boule unité fermée de $(E, \|.\|)$. En déduire que B n'est pas compacte.

   La question précédente montrer que pour tout sous-espace de dimension finie F de E, il existe un vecteur u de norme 1 tel que $d(u, F) \geqslant \frac{1}{2}$. En effet, comme F est de dimension finie et E ne l'est pas, il existe une vecteur x de E n'appartenant pas à F, à l'aide duquel on peut construire un tel vecteur u.

   On peut construire ainsi par récurrence (et par axiome du choix) une suite (u_n) de vecteurs unitaires tels que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ d(u_{n+1}, \mathrm{Vect}(u_0, \ldots, u_n)) \geqslant \frac{1}{2}$$
   Il suffit en effet de choisir u_0 unitaire quelconque, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, supposant $u_0, \ldots, u_n$ déjà construits, on applique le résultat précédent à $F = \mathrm{Vect}(u_0, \ldots, u_n)$.

   Par définition, tous les termes de cette suite appartiennent à B.

   De plus,
$$\forall p, q \in \mathbb{N},\ p \neq q \Rightarrow \|u_q - u_p\| \geqslant \frac{1}{2}$$
   En effet, pour $p \neq q$, on peut supposer quitte à intervertir p et q que $p < q$, et comme alors $u_p \in \mathrm{Vect}(u_0, \ldots, u_{q-1})$,
$$d(u_q, u_p) \geqslant d(u_q, \mathrm{Vect}(u_0, \ldots, u_{q-1})) \geqslant \frac{1}{2}$$
   Ainsi pour toute extractrice φ, la suite $(u_{\varphi(p)})_{p \geqslant 0}$ n'a pas de limite ℓ dans E car sinon il existerait $P \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geqslant P,\ \|u_{\varphi(p)} - \ell\| < \frac{1}{4}$, et on aurait, puisque φ est injective,
$$\frac{1}{2} \leqslant \|u_{\varphi(P+1)} - u_{\varphi(P)}\| \leqslant \|u_{\varphi(P+1)} - \ell\| + \|u_{\varphi(P)} - \ell\| < \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

ce qui est contradictoire.

Donc la suite (u_n) n'a aucune valeur d'adhérence dans E, ni a fortiori dans B. Ainsi B n'est pas compacte (bien qu'elle soit fermée et bornée).