Le but de ce devoir est de prouver le théorème de Cauchy linéaire

Théorème

Soit

$$(PC)\begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

un problème de Cauchy linéaire d'ordre 1 vectoriel en particulier les fonctions a et b sont **continues**. Il admet une unique solution.

Dans toute la suite E sera un espace vectoriel de dimension finie notée p, I un **segment** de $\mathbf{R}$ et a, b deux fonctions continues de I dans $\mathscr{L}(E)$. On note ℓ la longueur de I, $\|.\|_E$ une norme de E et $\|.\|_\infty$ la norme infinie des fonctions de I dans E (relativement à $\|.\|_E$) et $\|.\|_{\text{op}}$ la norme subordonnée à $\|.\|_E$.

1. Montrer qu'une fonction $x \in \mathscr{C}^1(I, E)$ vérifie (PC) si et seulement si

$$\forall t \in I, x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t a(u)(x(u)) + b(u)\ \mathrm{d}u$$

Par la suite, on procède par approximations. On considère la fonction x_0 définie sur I par $x_0 : t \mapsto x_0$ et, pour tout entier n, on pose

$$x_{n+1} : t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^t a(u)(x_n(u)) + b(u)\ \mathrm{d}u$$

Le but est alors de démontrer que la suite de fonctions (x_n) converge une fonction x qui sera la solution cherchée. De plus, il faut montrer que cette convergence est uniforme afin de pouvoir appliquer les théorèmes usuels d'intégration.

2. Justifier que $\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall t \in I$,

$$x_{n+1}(t) - x_n(t) = \int_{t_0}^t a(u)(x_n(u) - x_{n-1}(u))\ \mathrm{d}u.$$

3. Justifier qu'il existe $M \in \mathbf{R}$, tel que $\forall t \in I, \|a(t)\|_{\text{op}} \leqslant M$ et que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$

$$\|a(t)(x_n(t) - x_{n-1}(t))\|_E \leqslant M\|x_n(t) - x_{n-1}(t)\|_E$$

4. En déduire que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall t \in I, \|x_{n+1}(t) - x_n(t)\|_E \leqslant \frac{M^n \ell^n}{n!}\|x_1 - x_0\|_\infty$$

5. En déduire que la suite de fonction (x_n) converge uniformément vers une fonction x.
   On pourra faire apparaitre une série de fonctions.
6. Vérifier que la fonction x est solution du problème de Cauchy.
7. Montrer l'unicité de la solution du problème de Cauchy.
   On pourra considérer deux solutions et, en procédant comme ci-dessus, montrer que la norme infinie de la différence est nulle.
8. Comment étendre le résultat ou cas où I n'est pas un segment ?