

Semaine 17 - du 3 au 7 février

Topologie des espaces vectoriels normés (suite)

Topologie des espaces vectoriels normés

Reprise du programme précédent

Compacité

Définition d'une partie compacte A d'un espace vectoriel normé par la propriété de Bolzano-Weierstrass : toute suite d'élément de A admet une valeur d'adhérence.

La notion de compact ne change pas si on remplace la norme par une norme équivalente

Une partie compacte est fermée et bornée : réciproque fausse en général

Soit X une partie d'un compact A . Elle est compacte si et seulement si elle est fermée (dans A)

Une suite (u_n) d'un compact converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.

Un produit fini de compacts est compact.

L'image d'un compact par une application continue est un compact

Théorème des bornes atteintes pour les applications à valeurs dans $\mathbf{R}$

Théorème de Heine : Toute fonction continue sur un compact est uniformément continue

Espaces vectoriels de dimension finie

Toutes les normes sont équivalentes

Une partie A d'un espace vectoriel de dimension finie est compacte si et seulement si elle est fermée bornée.

Une suite bornée converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence

Les sous-espaces vectoriels sont fermés

Les applications linéaires sont continues

Les applications multilinéaires sont continues.

Les applications polynomiales sont continues

Séries à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie

Convergence et absolue convergence

Séries géométriques et exponentielles de matrices

Connexité par arcs

Chemin de A allant de x à y .

La relation $(x \mathcal{R}_A y) \iff (\text{il existe un chemin de } A \text{ de } x \text{ à } y)$ est une relation d'équivalence

Parties étoilée

On a les implications (convexe) $\Rightarrow$ (étoilée) $\Rightarrow$ (connexe par arcs) : réciproque fausse en général.

Composantes connexes par arcs

L'image d'une partie connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs