

Semaine 16 - du 27 au 31 janvier

Topologie des espaces vectoriels normés (début)

Topologie des espaces vectoriels normés

Ouverts : définition et exemples

Stabilité de l'ensemble des ouverts

Voisinages

Fermés : définition et exemples

Stabilité de l'ensemble des fermés

Points intérieurs d'une partie ; intérieur $\overset{\circ}{X}$

L'intérieur de X est le plus grand ouvert inclus dans X

Points adhérents à une partie ; adhérence $\overline{X}$

L'adhérence de X est le plus petit fermé contenant X

Caractérisation séquentielle des points adhérents et des fermés

Frontière d'une partie

Partie A dense dans un espace vectoriel E

Les notions topologiques (ouverts, fermés, adhérence, intérieur, densité) ne sont pas modifiées si on remplace la norme de l'espace vectoriel par une norme équivalente

Soit $A \subset E$. Définition des parties ouvertes (resp. fermée) relativement à A .

Les ouverts (resp. fermés) relatifs de A sont les traces dans A des ouverts (resp. fermés) de E .

Limites

Limite d'une fonction f définie sur A en un point a adhérent à A . Extension à $a = \infty$.

Une fonction admettant une limite en a est bornée au voisinage de a .

Caractérisation séquentielle de la limite

Cas des applications à valeurs dans un produit d'espace vectoriel normés. Le produit étant normé par la norme produit.

Limite d'une composée, d'une combinaison linéaire, d'un produit

Continuité

Fonctions continues en $a \in A$. Fonctions continues sur A

Caractérisation séquentielle de la continuité.

Invariance de la continuité en remplaçant les normes par des normes équivalentes

Continuité d'une composée, d'une combinaison linéaire, d'un produit.

Unicité du prolongement continu d'une fonction définie sur une partie dense

Image réciproque d'un ouvert / d'un fermé par une application continue

Applications uniformément continues ; uniformément continue implique continue

Applications lipschitziennes ; lipschitzienne implique uniformément continue.

Les applications **linéaires** sont continues si et seulement si elles sont lipschitziennes