Exercice (Centrale)

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$|\langle x_n|y_n\rangle - \langle x|y\rangle| = |\langle x_n - x|y_n\rangle + \langle x|y_n - y\rangle| \leqslant \|x_n - x\|.\|y_n\| + \|x\|.\|y_n - y\|$$

par inégalité triangulaire puis de Cauchy-Schwarz.
Or $\|x_n - x\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$ et $\|y_n - y\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$ et $\|y_n\| \underset{n\to\infty}{\to} \|y\|$ car la norme est lipschitzienne (de rapport 1) donc continue.
Par limite par encadrement, $\langle x_n|y_n\rangle - \langle x|y\rangle \underset{n\to\infty}{\to} 0$ donc $\boxed{\langle x_n|y_n\rangle \underset{n\to\infty}{\to} \langle x|y\rangle}$.
C'est un résultat du cours : le produit scalaire est continu.

2. Soient $x, y \in E$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} \langle x|b_i\rangle b_i \text{ et } t_n = \sum_{i=0}^{n} \langle y|b_i\rangle b_i$$

Par (C_2) les suites (s_n) et (t_n) convergent respectivement vers x et y au sens de $\|.\|$.
D'après la question précédente,

$$\langle x|y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle s_n|t_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{0,\leqslant i,j\leqslant n} \langle x|b_i\rangle\langle y|b_j\rangle\langle b_i|b_j\rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \langle x|b_i\rangle\langle y|b_i\rangle$$

Donc $\boxed{\text{la série } \sum_{i\geqslant 0}\langle x|b_i\rangle\langle y|b_i\rangle \text{ converge et sa somme est } \langle x|y\rangle.}$
On en déduit que

$$\boxed{\forall x \in E \quad \|x\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \langle x|b_i\rangle^2}$$

3. Soit $B = (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $C = (c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ deux bases hilbertiennes de H.
Pour tout $i \in \mathbb{N}$, par la question 2) on a :

$$\|T(b_i)\|^2 = \langle T(b_i)|T(b_i)\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \langle T(b_i|)|c_j\rangle^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \langle b_i||\widetilde{T}(c_j)\rangle^2$$

Ainsi, par sommation par piles et tranches dans $[0, +\infty]$ ("Fubini positif"),

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \|T(b_i)\|^2 = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \langle b_i||\widetilde{T}(c_j)\rangle^2 = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{\infty} \langle b_i||\widetilde{T}(c_j)\rangle^2 = \boxed{\sum_{j=0}^{\infty} \|\widetilde{T}(c_j)\|^2}$$

Appliquant ce qui précède à C et C on a aussi

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \|T(c_i)\|_2^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \|\widetilde{T}(c_j)\|_2^2$$

donc

$$\boxed{\sum_{i=0}^{+\infty} \|T(c_i)\|_2^2 = \sum_{i=0}^{+\infty} \|T(b_i)\|_2^2}$$

4. Par définition $HS(E) \subset \mathscr{L}_c(E)$.
$HS(E)$ n'est pas vide car l'endormorphisme nul a pour carré de norme de Hilbert-Schmidt
$$\sum_{i=0}^{\infty} \|0_E\|^2 = 0 < +\infty$$
De plus pour tous $S, T \in HS(E)$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}
\|S + \lambda T\|_{HS}^2 &= \sum_{i=0} \|S(b_i) + \lambda T(b_i)\|^2 \\
&= \sum_{i=0} \|S(b_i)\|^2 + \lambda^2 \|T(b_i)\|^2 + 2\lambda \langle S(b_i)|T(b_i)\rangle \\
&\leqslant \sum_{i=0} \|S(b_i)\|^2 + \lambda^2 \|T(b_i)\|^2 + 2|\lambda| \|S(b_i)\|.\|T(b_i)\| \text{ par Cauchy-Schwarz} \\
&\leqslant \sum_{i=0} \|S(b_i)\|^2 + \lambda^2 \|T(b_i)\|^2 + 2|\lambda| \frac{\|S(b_i)\|^2 + \|T(b_i)\|^2}{2} \text{ par inégalité} \\
&\qquad \text{arithmético-géométrique} \\
&< +\infty
\end{aligned}$$
Donc $\boxed{HS(E) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{L}_c(E).}$

5. Soit $T \in HS(H)$ et $x \in E$.
$$\begin{aligned}
T(x) &= T(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \langle x|b_i\rangle b_i) \\
&= \lim_{n\to\infty} T(\sum_{i=0}^{n} \langle x|b_i\rangle b_i) \text{ par continuité de } T \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \langle x|b_i\rangle T(b_i) \text{ par linéarité de } T
\end{aligned}$$
Or pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned}
\|\sum_{i=0}^{n} \langle x|b_i\rangle T(b_i)\| &\leqslant \sum_{i=0}^{n} |\langle x|b_i\rangle| \|T(b_i)\| \\
&\leqslant \sqrt{\sum_{i=0}^{n} \langle x|b_i\rangle^2}.\sqrt{\sum_{i=0}^{n} \|T(b_i)\|^2} \text{ par Cauchy-Schwarz dans } \mathbb{R}^{n+1}
\end{aligned}$$
On en déduit par continuité de la norme et passage aux limites dans les inégalités larges :
$$\|T(x)\| \leqslant \sqrt{\|x\|^2}\sqrt{\|T\|_{HS}^2} = \|x\|.\|T\|_{HS}$$
Donc T est $\|T\|_{HS}\|$-lispschitzienne et ainsi $\boxed{\|T\|_{op} \leqslant \|T\|_{HS}.}$

6. Supposons (C_1) et (C_2). Soit $x \in E$. La suite de terme général $s_n = \sum_{i=0}^{n} \langle x|b_i\rangle b_i$ converge vers x au sens de $\|.\|$ et est à termes dans $F = Vect(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Donc $\boxed{F \text{ est dense dans } E}$.
Réciproquement, supposons (C_1) et (C_3). Soit $x \in E$ et $\varepsilon > 0$. Comme F est dense dans E, il existe $f \in F$ tel que $\|x - f\| \leqslant \varepsilon$. Comme $f \in F$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f \in F_{n_0} = \mathsf{Vect}(b_0, \dots, b_{n_0})$.
Or pour tout $n \geqslant n_0$, le vecteur s_n est le projeté orthogonal de x sur F_n. Par le théorème de projection orthogonale, c'est le vecteur de F_n le plus proche de x. Comme $f \in F_{n_0} \subset F_n$, on a $\|x - s_n\| \leqslant \|x - f\| \leqslant \epsilon$.
Par définition de la limite, $\boxed{\text{la suite } (s_n) \text{ converge vers } x \text{ au sens de } \|.\|}$.

Exercice (CCINP)

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique (vérifiant que $A^\top = -A$) et non nulle. On peut par exemple considérer $A = E_{1,2} - E_{2,1}$. L'endomorphisme u canoniquement associé à u vérifie que $u^* = -u$ car la matrice de u^* dans la base canonique (qui est orthonormée) est $A^\top = -A$.
2. a) On suppose que $u^* = -u$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle u(x), x\rangle = \langle x, u^*(x)\rangle = -\langle u(x), x\rangle$$

Cela montre que $\langle u(x), x\rangle = 0$.

b) On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\langle u(x), x\rangle = 0$. En particulier pour x, y dans $\mathbb{R}^n$,

$$0 = \langle u^*(x+y), x+y\rangle = \langle u^*(x), x\rangle + \langle u^*(y), x\rangle + \langle u^*(x), y\rangle + \langle u^*(y), y\rangle$$

On en déduit que

$$\langle u^*(y), x\rangle = -\langle u^*(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle = \langle -u(y), x\rangle$$

Cela montre que $u^*(y) + u(y)$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ et donc $u^*(y) = -u(y)$.
3. a) On suppose (A). Soit x, y dans $\mathbb{R}^n$,

$$\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, u^* \circ u(y)\rangle \overset{(A)}{=} \langle x, u \circ u^*(y)\rangle = \langle u^*(x), u^*(y)\rangle$$

b) On suppose (B) Soit $x \in \mathbb{R}^n$.

$$\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x)\rangle \overset{(B)}{=} \langle u^*(x), u^*(x)\rangle = \|u^*(x)\|^2$$

On en déduit bien que $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

c) On suppose (C). On utilise des formules de polarisation. Pour x, y dans $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
\langle u(x), u(y)\rangle &= \frac{1}{2}\left(\|u(x+y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2\right) \\
&\overset{(C)}{=} \frac{1}{2}\left(\|u^*(x+y)\|^2 - \|u^*(x)\|^2 - \|u^*(y)\|^2\right) \\
&= \langle u^*(x), u^*(y)\rangle
\end{aligned}$$

d) On suppose (B). Soit x, y dans $\mathbb{R}^n$.

$$\langle x, u^* \circ u(y)\rangle = \langle u(x), u(y)\rangle \overset{\text{(B)}}{=} \langle u^*(x), u^*(y)\rangle = \langle x, (u^*)^* \circ u^*(y)\rangle$$

Or $(u^*)^* = u$. On a donc obtenu que pour tout x, y dans $\mathbb{R}^n$,

$$\langle x, u^* \circ u(y)\rangle = \langle x, u \circ u^*(y)\rangle$$

Cela implique, comme en 2.b que $u^* \circ u = u \circ u^*$.

4. On suppose que $n = 2$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sa matrice dans la base canonique.
D'après le cours, la matrice de u^* est $A^\top$. On en déduit que u est normal si et seulement si $AA^\top = A^\top A$. On en déduit en faisant le calcul que u est normal si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{rcl} a^2+b^2 & = & a^2+c^2 \\ ac+bd & = & ab+cd \\ c^2+d^2 & = & b^2+d^2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} b^2 & = & c^2 \\ ac+bd & = & ab+cd \end{array}\right.$$

Ce dernier système est équivalent à $b = c$ ou ($b = -c$ et $b(d-a) = b(a-d)$).
Finalement, u est normal si et seulement si $b = c$ ou ($b = -c$ et $a = d$).

5. Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et v celui associé à la matrice $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
En utilisant la question précédente on voit que u et v sont des endomorphismes normaux.
Par contre la matrice de $u+v$ et

$$U + V = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En utilisant encore 4) on voit que $u+v$ n'est pas un endomorphisme normal ; l'ensemble des endomorphismes normaux n'est pas stable par combinaison linéaire.
De même

$$UV = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cela permet de voir que $u \circ v$ n'est pas un endomorphisme normal.

6. Soit $r \in [\![1, r-1]\!]$. Soit $B \in \mathscr{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$.
On voit que $BB^\top \in \mathscr{M}_r(\mathbb{R})$ et que

$$\operatorname{tr}(BB^\top) = \sum_{i=1}^{r} (BB^\top)[i,i] = \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{n-r} B[i,k]B^\top[k,i] = \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{n-r} B[i,k]^2$$

Une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls et donc si $\operatorname{tr}(BB^\top) = 0$ alors $B = 0$.

7. Soit u un endomorphisme normal. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
On considère une base orthonormée obtenue en concatenant une base orthonormée de F avec une base orthonormée de $F^\perp$. Considérons M la matrice de u dans cette base. Comme F est stable par u, on peut écrire M par blocs

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$$

Comme u est normal $MM^\top = M^\top M$. Or

$$MM^\top = \left(\begin{array}{c|c} AA^\top + BB^\top & BD^\top \\ \hline DB^\top & DD^\top \end{array}\right) \text{ et } M^\top M = \left(\begin{array}{c|c} A^\top A & A^\top B \\ \hline B^\top A & B^\top B + D^\top D \end{array}\right)$$

On en déduit que $AA^\top + BB^\top = A^\top A$. En prenant la trace et en utilisant que $\mathrm{tr}(AA^\top) = \mathrm{tr}(A^\top A)$, on obtient que $\mathrm{tr}(BB^\top) = 0$.
En utilisant la question 6) on en déduit que $B = 0$ ce qui montre que $F^\perp$ est stable u.

Problème

Partie I - Une inégalité de concentration

1. Soit $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall \omega \in \Omega, |X(\omega)| \leqslant M$.
Dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, comme $|X|$ est positive, par la formule de transfert :

$$\mathbf{E}(|X|) = \sum_{x \in X(\Omega)} |x| P(X = x) \leqslant M \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = M$$

$\boxed{\text{Donc } X \text{ est d'espérance finie}}$.

2. a) Soit $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall \omega \in \Omega, |X(\omega)| \leqslant M$ et $t \in \mathbb{R}$. Pour $\omega \in \Omega$, $|e^{tX}(\omega)| \leqslant e^{|t|M}$.
Donc e^{tX} est bornée, $\boxed{\text{elle est donc d'espérance finie}}$.

   b) Soit $x_0 \in X(\Omega)$ tel que $\mathbf{P}(X = x_0) > 0$. D'après le théorème de transfert,

$$\mathbf{E}(e^{tX}) = \sum_{x \in X(\Omega)} e^{tx} P(X = x) = e^{tx_0} P(X = x_0) + \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \neq x_0}} e^{tx} \mathbf{P}(X = x)$$

   or pour tout $x \in X(\Omega)$, $e^{tx} > 0$ donc $e^{tx_0} P(X = x_0) > 0$ et la somme qui reste est positive d'où $\boxed{\mathbf{E}(e^{tX}) > 0}$

3. Soit Y une variable aléatoire bornée, $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose e^{tY} qui est une variable aléatoire bornée (donc d'espérance finie). Elle est de plus positive. De plus, comme $x \mapsto e^{tx}$ est croissante, $Y \geqslant x$ si et seulement si $e^{tY} \geqslant e^{tx}$. On en déduit, d'après l'inégalité de Markov appliquée à e^{tY} :

$$\mathbf{P}(Y \geqslant x) = \mathbf{P}(e^{tY} \geqslant e^{tx}) \leqslant \frac{\mathbf{E}(e^{tY})}{e^{tx}} = e^{-tx} e^{\ln(\mathbf{E}(e^{tY}))} e^{-tx + \Psi_Y(t)}.$$

4. a) Soit $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall \omega \in \Omega, \forall i \in [\![1, n]\!], |X_i(\omega)| \leqslant M$.

$$|Y(\omega)| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |Z_i(\omega)| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} M + |m| \leqslant M + |m|$$

   On en déduit que $\boxed{Y \text{ est bornée}}$

   b) Soit $t > 0$, comme les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, les variables $Z_1, \ldots, Z_n$ sont mutuellement indépendantes puis les variables $e^{tZ_1/n}, \ldots, e^{tZ_n/n}$ sont mutuellement indépendantes d'après le lemme des coalitions.

   c) Soit $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\Psi_Y(t) &= \ln(\mathbf{E}(e^{tY})) = \ln\left(\mathbf{E}\left(e^{t(\sum\limits_{i=1}^{n} Z_i)/n}\right)\right) = \ln\left(\mathbf{E}\left(\prod_{i=1}^{n} e^{tZ_i/n}\right)\right) \\
&= \ln\left(\prod_{i=1}^{n} \mathbf{E}\left(e^{tZ_i/n}\right)\right) \quad \text{les variables } e^{tZ_1/n}, \ldots \text{ sont mutuellement indépendantes} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Psi_{Z_i}(t/n) = n\Psi_{Z_1}\left(\frac{t}{n}\right)
\end{aligned}$$

5. a) Comme X_1 suit la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$, $m = \mathbf{E}(X_1) = p$. On en déduit que, $Z_1 = X_1 - p$. Par le théorème de transfert, pour tout réel t :

$$\theta_{Z_1}(t) = \mathbf{E}\left(e^{t(X_1-p)}\right) = \sum_{x\in X_1(\Omega)} e^{t(x-p)}P(X_1 = x) = pe^{t(1-p)}+(1-p)e^{-pt} = e^{-pt}(1-p+pe^t).$$

En prenant le logarithme, on obtient que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\boxed{\Psi_{Z_1}(t) = -pt + \ln(1-p+pe^t)}$

b) D'après la formule ci-dessus, $\boxed{\Psi_{Z_1}(0) = \ln(1-p+p) = 0}$

De plus, pour $t \in \mathbb{R}$, $\Psi'_{Z_1}(t) = -p + \dfrac{pe^t}{1-p+pe^t}$ et donc $\boxed{\Psi'_{Z_1}(0) = 0}$

c) En dérivant la formule obtenue ci-dessus, $\Psi''_{Z_1}(t) = \dfrac{pe^t(1-p)}{(1-p+pe^t)^2}$.

On pose alors $\alpha = 1-p$ et $\beta = pe^t$ et on obtient $\Psi''_{Z_1}(t) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}$

Maintenant,

$$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2} \leqslant \frac{1}{4} \iff 4\alpha\beta \leqslant (\alpha+\beta)^2 \iff 0 \leqslant \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \iff 0 \leqslant (\alpha-\beta)^2$$

Cette dernière inéquation est vérifiée $\boxed{\text{donc } \Psi''_{Z_1}(t) \leqslant \frac{1}{4}}$

d) Comme $t \geqslant 0$. On a

$$\Psi'_{Z_1}(t) = \Psi'_{Z_1}(t) - \Psi'_{Z_1}(0) = \int_0^t \Psi''_{Z_1}(u)\mathrm{d}u \leqslant \int_0^t \frac{1}{4}\mathrm{d}u = \frac{t}{4}.$$

Ensuite

$$\Psi_{Z_1}(t) = \Psi_{Z_1}(t) - \Psi_{Z_1}(0) = \int_0^t \Psi'_{Z_1}(u)\mathrm{d}u \leqslant \int_0^t \frac{u}{4}\mathrm{d}u = \frac{t^2}{8}.$$

6. a) En appliquant les résultats des questions 3 et 5.d on obtient que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\mathbf{P}(Y \geqslant x) \leqslant e^{-tx+\Psi_Y(t)} = e^{-tx+n\Psi_{Z_1}(t/n)} \leqslant \exp\left(-tx + n\frac{t^2}{8n^2}\right)$$

Finalement $\mathbf{P}(Y \geqslant x) \leqslant \exp\left(-tx + \frac{t^2}{8n}\right)$

b) On étudie $h : t \mapsto -tx + \frac{t^2}{8n}$. Elle est dérivable et $h' : t \mapsto -x + \frac{t}{4n}$. On en déduit que h atteint son minimum en $t = 4nx$.

En appliquant l'inégalité ci-dessus pour $t = 4nx > 0$, on obtient

$$\mathbf{P}(Y \geqslant x) \leqslant \exp\left(-4nx^2 + \frac{16n^2x^2}{8n}\right) = \exp(-2nx^2)$$

Partie II - Graphes aléatoires

7. Soit $i \in [\![1, n]\!]$,

a) La variable aléatoire S_i est la somme de $n-1$ variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi $\mathscr{B}(p)$ donc $S_i \sim \mathscr{B}(n,p)$. On en déduit que $\mathbf{E}(S_i) = np$.

b) Soit $x > 0$. On pose pour tout $\{i, j\} \in P_n$, $Z_{i,j} = X_{i,j} - \mathbf{E}(X_{i,j}) = X_{i,j} - p$. Dès lors on peut appliquer les résultats de la partie I à

$$\frac{1}{n-1} S_i - p = \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{j \in [1,n] \\ j \neq i}}^{n} X_{i,j} - p = \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{j \in [1,n] \\ j \neq i}}^{n} Z_{i,j}$$

On obtient que

$$\mathbf{P}\left(|S_i - (n-1)p| \geqslant (n-1)x\right) = \mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n-1} S_i - p\right| \geqslant x\right) \leqslant 2\exp(-2(n-1)x^2)$$

En utilisant les résultats de la partie I, montrer que pour tout $x > 0$,

$$\mathbf{P}\big(|S_i - (n-1)p| \geqslant (n-1)x\big) \leqslant 2e^{-2(n-1)x^2}$$

8. a) Avec les notations de l'énoncé,

$$\overline{Z_n} = \bigcup_{i \in [1,n]} \left(|S_i - (n-1)| \geqslant \varepsilon(n-1)p_n\right)$$

On en déduit (par l'inégalité de Boole) et en appliquant les résultats de la question 7.b pour $x = \varepsilon\, p_n$:

$$\mathbf{P}(\overline{Z_n}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(|S_i - (n-1)| \geqslant \varepsilon(n-1)p_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\left(|S_i - (n-1)| \geqslant (n-1)x\right)$$

puis

$$\mathbf{P}(\overline{Z_n}) \leqslant 2n\exp(-2(n-1)x^2) = 2n\exp(-2\varepsilon^2(n-1)p_n^2)$$

b) On suppose que la suite (p_n) vérifie que pour tout entier $n \geqslant 2$, $p_n \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{\ln n}{n}}$,

On a alors $2n\exp(-2\varepsilon^2(n-1)p^2) = 2\exp(u_n)$ où

$$u_n = \ln n - 2\varepsilon^2(n-1)p_n^2 \leqslant \ln n - 2(n-1)\frac{\ln n}{n} = \frac{-n+2}{n}\ln n \sim -\ln n$$

On en déduit que (u_n) tend vers $-\infty$ quand $n \to \infty$ et donc $2\exp(u_n)$ tend vers 0. Cela implique que $\lim\limits_{n\to\infty} P(\overline{Z_n}) = 0$ et donc $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(Z_n) = 1}$

9. Il y a égalité pour $n \leqslant 2$.
hérédité :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^{n+1} B_i) &= \mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) + \mathbf{P}(B_{n+1}) - \mathbf{P}\left((\bigcup_{i=1}^{n} B_i) \cap B_{n+1}\right) \\
&= \mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) + \mathbf{P}(B_{n+1}) - \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (B_i \cap B_{n+1})\right) \\
&\geqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(B_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathbf{P}(B_i \cap B_j) + \mathbf{P}(B_{n+1}) - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(B_i \cap B_{n+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{P}(B_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} \mathbf{P}(B_i \cap B_j)
\end{aligned}$$

10. a) La suite $(k!)_{k\geqslant 0}$ a pour limite $+\infty$ donc l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}\, k! \geqslant n\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Soit k_n son plus petit élément. De plus $k_n \geqslant 2$ car $0! = 1! = 1 < n$. Ainsi $(k_n - 1)! < n! \leqslant k_n$. Comme la suite $(k!)_{k\geqslant 1}$ est strictement croissante, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $k \neq k_n$, ($k! < n$ ou $(k-1)! \geqslant n$). D'où l'unicité de $k_n \geqslant 1$ tel que $(k_n - 1)! < n \leqslant k_n!$.

b) La suite (k_n) est croissante car si (absurde) il existe un entier n tel que $k_n > k_{n+1}$, alors $k_n - 1 \geqslant k_{n+1}$ et donc (par croissance de la fonction factorielle) :

$$n \geqslant (k_n - 1)! \geqslant k_{n+1}! \geqslant n + 1$$

ce qui est contradictoire.

c) De plus la suite (k_n) n'a pas de majorant réel M car sinon on aurait pour tout $n \geqslant 2$, $n \leqslant k_n! \leqslant \lceil M \rceil!$, ce qui est contradictoire ($\mathbb{N}$ n'a pas de plus grand élément). Donc $k_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$.

d) Soit $\gamma > 0$.

$$k_n^\gamma \underset{n\to\infty}{\sim} (k_n - 1)^\gamma = o((k_n - 1)!) = o(O(n)) = o(n)$$

11. a) Rappelons que $S_1 \hookrightarrow \mathscr{B}(n-1, \frac{1}{n})$.

$$\alpha_n = \mathbf{P}(S_1 = k_n) = \binom{n-1}{k_n} \frac{1}{n^{k_n}} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1-k_n}$$

b)

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1-k_n} = e^{(n-1-k_n)\ln(1-\frac{1}{n})} \underset{n\to\infty}{\to} e^{-1}$$

car l'exponentielle est continue et car, puisque $k_n = o(n)$,

$$(n - 1 - k_n) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} n(-1/n) \underset{n\to\infty}{\to} -1$$

Or

$$\binom{n-1}{k_n} \frac{1}{n^{k_n}} = \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k_n)}{n^{k_n} k_n!} = \frac{1}{k_n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k_n}{n}\right)$$

De plus,

$$1 \geqslant (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \dots (1 - \frac{k_n}{n}) \geqslant (1 - \frac{k_n}{n})^{k_n} = e^{k_n \ln(1-\frac{k_n}{n})}$$

$$k_n \ln(1 - \frac{k_n}{n}) \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{k_n^2}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

donc par continuité de l'exponentielle, $e^{k_n \ln(1-\frac{k_n}{n})} \underset{n\to\infty}{\to} 1$.

Par encadrement, on a donc

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k_n}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\to} 1$$

Ainsi

$$\alpha_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{e^{-1}}{k_n!}$$

12. a) On voit que

$$\begin{aligned}
\beta_n &= \mathbf{P}\left((S_1 = k_n) \cap (S_2 = k_n)\right) \\
&= \mathbf{P}\left((S_1 = k_n) \cap (S_2 = k_n) \cap (X_{1,2} = 1)\right) \\
&\quad + \mathbf{P}\left((S_1 = k_n) \cap (S_2 = k_n) \cap (X_{1,2} = 0)\right) \\
&= \mathbf{P}((X_{1,2} = 1) \cap \left(\sum_{i=3}^{n} X_{1,i} = k_n - 1) \cap (\sum_{i=3}^{n} X_{2,i} = k_n - 1)\right) \\
&\quad + \mathbf{P}((X_{1,2} = 0) \cap \left(\sum_{i=3}^{n} X_{1,i} = k_n) \cap (\sum_{i=3}^{n} X_{2,i} = k_n)\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\binom{n-2}{k_n - 1}(1/n)^{k_n - 1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1-k_n}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(\binom{n-2}{k_n}(1/n)^{k_n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-2-k_n}\right)^2
\end{aligned}$$

car par coalitions, $X_{1,2}$, $\sum_{i=3}^{n} X_{1,i}$ et $\sum_{i=3}^{n} X_{2,i}$ sont indépendantes, et que la premières de ces variables suit la loi $\mathscr{B}(1/n)$ et les deux autres la loi $\mathscr{B}(n-2, 1/n)$.

b) Par un raisonnement analogue au précédent, le premier terme de la somme ci-dessus est équivalent à $\frac{1}{n}\frac{e^{-2}}{(k_n-1)!^2}$ et le second à $\frac{e^{-2}}{k_n!^2}$. La somme est donc équivalente au second terme car $\frac{1}{n}\frac{e^{-2}}{(k_n-1)!^2} = \frac{k_n^2}{n}\frac{e^{-2}}{k_n!^2}$ est négligeable devant $\frac{e^{-2}}{k_n!^2}$ puisque $k_n^2 = o(n)$.

13. Par la question a)

$$\gamma_n \geqslant n\mathbf{P}(S_1 = k_n) - \frac{n(n-1)}{2}\mathbf{P}((S_1 = k_n) \cap (S_2 = k_n)) = u_n$$

Le premier terme de cette différence est équivalent à $\frac{ne^{-1}}{k_n!}$ et le second à $\frac{n^2}{2}\frac{e^{-2}}{k_n!^2}$.
Lorsqu'il existe k entier supérieur à 2 tel que $n = k!$, on a $k_n = k$ donc $k_n! = n$. La suite extraite $(u_{k!})_{k \geqslant 2}$ converge donc vers $e^{-1} - \frac{e^{-2}}{2}$.
Si (absurde) la suite (γ_n) convergeait vers 0, la suite extraite $(\gamma_{k!})$ convergerait aussi vers 0 et on aurait, par passage aux limites dans les inégalités larges :

$$0 \geqslant e^{-1} - \frac{e^{-2}}{2}$$

ce qui est contradictoire.
Donc (γ_n) ne converge pas vers zéro.