Calculatrices interdites. L'exercice et le problème sont indépendants.

Exercice

Soit $(E, \langle\,|\,\rangle)$ un espace préhilbertien réel. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

1) Question de cours à redémontrer : Soit x, y dans E et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$. On suppose que $(x_n) \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ et $(y_n) \xrightarrow{\|\cdot\|} y$ (convergence au sens de $\|\cdot\|$). Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \langle x_n|y_n\rangle = \langle x|y\rangle$.

Soit $\mathscr{B} = (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E. On dit que $\mathscr{B}$ est une *base hilbertienne* si

(C_1) la suite est orthonormale : pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, $\langle b_i|b_j\rangle = 1$ si $i = j$ et 0 sinon

(C_2) pour tout $x \in E$, $\sum\limits_{i=0}^{n} \langle x|b_i\rangle b_i \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ (au sens de la norme $\|\cdot\|$)

Dans toute la suite du problème, on considère un espace préhilbertien E qui admet une base hilbertienne $\mathscr{B} = (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$.
On prendra garde au fait qu'en général une base hilbertienne **n'est pas** une base (cf dernière question de cet exercice).

2) Montrer que si $\mathscr{B} = (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de E, alors

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle x|y\rangle = \sum_{i=0}^{+\infty} \langle x|b_i\rangle\langle y|b_i\rangle$$

On suppose désormais que pour tout endomorphisme continu $T \in \mathscr{L}_c(E)$, il existe un endomorphisme continu $\widetilde{T} \in \mathscr{L}_c(E)$ tel que

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle T(x)|y\rangle \ = \ \langle x|\widetilde{T}(y)\rangle$$

3) Soit $\mathscr{B} = (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $\mathscr{C} = (c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ deux bases hilbertiennes de E. Montrer que, dans $[0, +\infty]$,

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \|T(b_i)\|^2 = \sum_{j=0}^{+\infty} \|\widetilde{T}(c_j)\|^2$$

En déduire que $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} \|T(b_i)\|^2$ ne dépend pas de la base hilbertienne choisie.

On pose par convention, $\sqrt{+\infty} = +\infty$. On note alors

$$\|T\|_{\text{HS}} = \sqrt{\sum_{i=0}^{+\infty} \|T(b_i)\|^2} \in [0, +\infty] \ \text{ et } \ HS(E) = \{T \in \mathscr{L}_c(E) \mid \|T\|_{HS} < +\infty\}$$

4) Montrer que $HS(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}_c(E)$.
5) Montrer que pour $T \in HS(E)$, $\|T\|_{\text{op}} \leqslant \|T\|_{\text{HS}}$.
6) Montrer qu'une suite $\mathscr{B} = (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E est une base hilbertienne si et seulement si elle vérifie (C_1) et (C_3) où
(C_3) le sous-espace $\text{Vect}(\mathscr{B})$ est dense dans E (au sens de $\|\cdot\|$)

Problème

Dans tout le problème, les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. Elles sont toutes supposées discrètes et réelles.
Pour tout événement $A \in \mathscr{A}$ on désignera son complémentaire dans Ω par $\bar{A}$.
Les deux parties sont indépendantes à part la question 7.b de la partie II qui nécessite les résultats prouvés dans la partie I.

Partie I - Une inégalité de concentration

Une variable aléatoire X est dite bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, $\forall \omega \in \Omega, |X(\omega)| \leqslant M$.

1) Montrer qu'une variable aléatoire bornée est d'espérance finie.
2) Soit X une variable aléatoire bornée et $t \in \mathbb{R}$.
   a) Montrer que la variable aléatoire e^{tX} est d'espérance finie.
   b) Justifier que $\mathbf{E}(e^{tX})$ est strictement positif.

On pose alors, pour toute variable aléatoire X bornée, θ_X et Ψ_X définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\theta_X : t \mapsto \mathbf{E}(e^{tX}) \text{ et } \Psi_X : t \mapsto \ln(\theta_X(t)) = \ln(\mathbf{E}(e^{tX}))$$

3) Soit Y une variable aléatoire bornée, $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, montrer que

$$\mathbf{P}(Y \geqslant x) \leqslant \frac{\mathbf{E}(e^{tY})}{e^{tx}} = e^{-tx+\Psi_Y(t)}.$$

On considère dans la suite de cette partie un entier naturel n non nul, $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et bornées, suivant toutes la même loi.
On note $m = \mathbf{E}(X_1)$ et, pour tout i compris entre 1 et n, $Z_i = X_i - m$.
On pose alors $Y = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} Z_i$.

4) a) Montrer que Y est bornée.
   b) Soit $t \in \mathbb{R}$, justifier que les variables, $e^{tZ_1/n}, \dots, e^{tZ_n/n}$ sont mutuellement indépendantes.
   c) En déduire que $\Psi_Y(t) = n\Psi_{Z_1}(\frac{t}{n})$.

On considère dans la suite de cette partie que les variables X_i suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.

5) a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Psi_{Z_1}(t) = -pt + \ln(1 - p + pe^t)$.
   b) Calculer $\Psi_{Z_1}(0)$ et $\Psi'_{Z_1}(0)$.
   c) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, \Psi''_{Z_1}(t) \leqslant \frac{1}{4}$.
   On pourra calculer $\Psi''_{Z_1}(t)$ et déterminer α, β tels que $\Psi''_{Z_1}(t) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}$.
   d) En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}_+, \Psi_{Z_1}(t) \leqslant \frac{t^2}{8}$.
6) Soit $x > 0$.
   a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathbf{P}(Y \geqslant x) \leqslant \exp\bigl(-tx + \frac{t^2}{8n}\bigr)$.
   b) En déduire que $\mathbf{P}(Y \geqslant x) \leqslant \exp(-2nx^2)$.
   On pourra étudier la fonction $t \mapsto -tx + \frac{t^2}{8n}$.

On admet que si $x > 0$ on peut de même montrer que $\mathbf{P}(Y \leqslant -x) \leqslant \exp(-2nx^2)$ et donc on a l'inégalité :

$$\mathbf{P}(|Y| \geqslant x) \leqslant 2\exp(-2nx^2)$$

Partie II - Graphes aléatoires

Soit n un entier naturel supérieur ou égal 2 et $p \in]0,1[$.
On note $P_n = \{\{i,j\} \subset [\![1,n]\!]^2 \; ; \; i \neq j\}$ l'ensemble des paires d'éléments de $[\![1,n]\!]$.
On appelle *graphe aléatoire* la donnée d'une famille $(X_{i,j})_{\{i,j\}\in P_n}$ de $\dfrac{n(n-1)}{2}$ variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une même loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$.
On notera que $X_{i,j} = X_{j,i}$ car $\{i,j\} = \{j,i\}$.
Ainsi pour tout $\omega \in \Omega$, la famille $(X_{i,j}(\omega))_{\{i,j\}\in P_n}$ détermine un graphe dont les sommets sont $1, 2, \ldots, n$ et les arêtes sont les paires $\{i,j\}$ telles que $X_{i,j}(\omega) = 1$.
On considère un graphe aléatoire $(X_{i,j})_{\{i,j\}\in P_n}$.
Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note $S_i = \sum\limits_{\substack{j\in[\![1,n]\!]\\ j\neq i}}^{n} X_{i,j}$ le nombre d'arêtes partant du sommet i.
On dit que S_i est le *degré* du sommet i.

7) Soit $i \in [\![1,n]\!]$,

   a) Quelle est la loi de S_i ? Quelle est son espérance ?
      On reconnaitra une loi usuelle

   b) En utilisant les résultats de la partie I, montrer que pour tout $x > 0$,

$$\mathbf{P}\big(|S_i - (n-1)p| \geqslant (n-1)x\big) \leqslant 2e^{-2(n-1)x^2}$$

Dans la suite nous allons faire tendre le nombre n de sommets vers $+\infty$. La probabilité p d'existence d'une arête entre deux sommets donnés distincts sera choisie en fonction de n. On la notera p_n.
Remarquons que les variables S_i (ainsi que l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$) dépendent de n mais ceci ne sera pas reflété dans la notation.

8) On veut calculer la probabilité que tous les sommets aient un degré « proche » de la moyenne des degrés.
   Soit $\varepsilon > 0$. On note $Z_n = \bigcap\limits_{i\in[\![1,n]\!]} \big((1-\varepsilon)(n-1)p_n < S_i < (1+\varepsilon)(n-1)p_n\big)$.

   a) Montrer que $\mathbf{P}\big(\overline{Z_n}\big) \leqslant 2ne^{-2\varepsilon^2(n-1)p_n^2}$.
      On exprimera $\overline{Z_n}$ comme une union d'événements du type de ceux étudiés à la question 7.b en précisant la valeur de x choisie.

   b) En déduire que si pour tout entier $n \geqslant 2$, $p_n \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{\ln n}{n}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(Z_n) = 1$.

Nous allons voir dans cette fin de problème une suite de graphes aléatoires où la moyenne des degrés tend vers 1 mais où néanmoins la probabilité que d'au moins un sommet partent « nettement plus » qu'une arête ne tend pas vers 0.

9) Soient $B_1, \ldots, B_n$ des événements. Montrer que

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(B_i) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathbf{P}(B_i \cap B_j)$$

   On pourra procéder par récurrence.

10) a) Soit n un naturel tel que $n \geqslant 2$. Montrer qu'il existe un unique naturel $k_n \geqslant 1$ vérifiant $(k_n - 1)! < n \leqslant k_n!$.

   b) Montrer que la suite $(k_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante.

   c) Montrer que $k_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

d) Montrer que pour tout réel γ strictement positif, $k_n^\gamma = o(n)$.

Soit n un naturel tel que $n \geqslant 2$. On pose $p_n = \frac{1}{n}$ et (dans les notations précédentes) :

$$\alpha_n = \mathbf{P}(S_1 = k_n)$$

$$\beta_n = \mathbf{P}\left((S_1 = k_n) \cap (S_2 = k_n)\right)$$

$$\gamma_n = \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (S_i = k_n)\right)$$

On notera que pour des raisons de symétrie évidentes,

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \;\; \mathbf{P}(S_i = k_n) = \alpha_n \quad \text{et} \quad \forall i, j \in [\![1, n]\!] \;\; i \neq j \Rightarrow \mathbf{P}\left((S_i = k_n) \cap (S_j = k_n)\right) = \beta_n$$

11) a) Exprimer α_n en fonction de n et de k_n.

b) Montrer que $\alpha_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{e^{-1}}{k_n!}$

NB : comme k_n varie avec n, ce résultat n'est pas la conséquence immédiate d'un théorème du cours.

12) a) Montrer que

$$\begin{aligned}\beta_n \;=\; & \frac{1}{n}\left(\binom{n-2}{k_n-1}(1/n)^{k_n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1-k_n}\right)^2 \\ & + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\binom{n-2}{k_n}(1/n)^{k_n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-2-k_n}\right)^2\end{aligned}$$

b) En déduire un équivalent (s'exprimant simplement à l'aide de k_n) de β_n quand n tend vers l'infini.

On pourra procéder rapidement en se référant aux raisonnements ayant permis de déterminer un équivalent de α_n.

13) En déduire que la suite (γ_n) ne converge pas vers zéro.