Devoir surveillé 6 (CCINP)

Calculatrices interdites. L'exercice et le problème sont indépendants.

Exercice

Soit $n \geqslant 2$. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.

1) Justifier qu'il existe un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ non nul vérifiant que $u^* = -u$.
2) Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$.
   a) Montrer que si $u^* = -u$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\langle u(x), x\rangle = 0$.
   b) Réciproquement, montrer que si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\langle u(x), x\rangle = 0$ alors $u^* = -u$.
   On pourra commencer par calculer $\langle u^*(x+y), x+y\rangle$.
3) On considère les trois assertions suivantes :
   (A) $u \circ u^* = u^* \circ u$
   (B) Pour tout x, y dans $\mathbb{R}^n$, $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle u^*(x), u^*(y)\rangle$
   (C) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$

   a) Montrer que (A) $\Rightarrow$ (B).
   b) Montrer que (B) $\Rightarrow$ (C).
   c) Montrer que (C) $\Rightarrow$ (B).
   d) Montrer que (B) $\Rightarrow$ (A).

   Un endomorphisme vérifiant les conditions ci-dessus est dit normal.
4) On suppose que $n = 2$. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sa matrice dans la base canonique. Montrer que u est normal si et seulement si $b = c$ ou ($b = -c$ et $a = d$).
5) L'ensemble des endomorphismes normaux est-il stable par composition ? par combinaison linéaire ?
   On pourra considérer les endomorphismes u et v de $\mathbb{R}^2$ dont les matrices dans la base canonique sont $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
6) Soient $p, q \in \mathbb{N}$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Montrer que si $\operatorname{tr}(BB^\top) = 0$ alors $B = 0$.
7) Soit u un endomorphisme normal. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si F est stable par u alors $F^\perp$ est aussi stable par u.
   On pourra commencer par écrire la matrice de u dans une base orthonormée bien choisie.

Problème

Dans tout le problème, les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. Elles sont toutes supposées discrètes et réelles.
Pour tout événement $A \in \mathscr{A}$ on désignera son complémentaire dans Ω par $\bar{A}$.
Les deux parties sont indépendantes à part la question 7.b de la partie II qui nécessite les résultats prouvés dans la partie I.

Partie I - Une inégalité de concentration

Une variable aléatoire X est dite bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, $\forall \omega \in \Omega, |X(\omega)| \leqslant M$.

1) Montrer qu'une variable aléatoire bornée est d'espérance finie.
2) Soit X une variable aléatoire bornée et $t \in \mathbb{R}$.
   a) Montrer que la variable aléatoire e^{tX} est d'espérance finie.
   b) Justifier que $\mathbf{E}(e^{tX})$ est strictement positif.

On pose alors, pour toute variable aléatoire X bornée, θ_X et Ψ_X définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\theta_X : t \mapsto \mathbf{E}(e^{tX}) \text{ et } \Psi_X : t \mapsto \ln(\theta_X(t)) = \ln(\mathbf{E}(e^{tX}))$$

3) Soit Y une variable aléatoire bornée, $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, montrer que

$$\mathbf{P}(Y \geqslant x) \leqslant \frac{\mathbf{E}(e^{tY})}{e^{tx}} = e^{-tx+\Psi_Y(t)}.$$

On considère dans la suite de cette partie un entier naturel n non nul, $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et bornées, suivant toutes la même loi.
On note $m = \mathbf{E}(X_1)$ et, pour tout i compris entre 1 et n, $Z_i = X_i - m$.
On pose alors $Y = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} Z_i$.

4) a) Montrer que Y est bornée.
   b) Soit $t \in \mathbb{R}$, justifier que les variables, $e^{tZ_1/n}, \ldots, e^{tZ_n/n}$ sont mutuellement indépendantes.
   c) En déduire que $\Psi_Y(t) = n\Psi_{Z_1}(\frac{t}{n})$.

On considère dans la suite de cette partie que les variables X_i suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

5) a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Psi_{Z_1}(t) = -pt + \ln(1 - p + pe^t)$.
   b) Calculer $\Psi_{Z_1}(0)$ et $\Psi'_{Z_1}(0)$.
   c) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, \Psi''_{Z_1}(t) \leqslant \frac{1}{4}$.
   On pourra calculer $\Psi''_{Z_1}(t)$ et déterminer α, β tels que $\Psi''_{Z_1}(t) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}$.
   d) En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}_+, \Psi_{Z_1}(t) \leqslant \frac{t^2}{8}$.
6) Soit $x > 0$.
   a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathbf{P}(Y \geqslant x) \leqslant \exp\big(-tx + \frac{t^2}{8n}\big)$.
   b) En déduire que $\mathbf{P}(Y \geqslant x) \leqslant \exp(-2nx^2)$.
   On pourra étudier la fonction $t \mapsto -tx + \frac{t^2}{8n}$.

On admet que si $x > 0$ on peut de même montrer que $\mathbf{P}(Y \leqslant -x) \leqslant \exp(-2nx^2)$ et donc on a l'inégalité :

$$\mathbf{P}(|Y| \geqslant x) \leqslant 2\exp(-2nx^2)$$

Partie II - Graphes aléatoires

Soit n un entier naturel supérieur ou égal 2 et $p \in]0,1[$.
On note $P_n = \{\{i,j\} \subset [\![1,n]\!]^2 \ ; \ i \neq j\}$ l'ensemble des paires d'éléments de $[\![1,n]\!]$.
On appelle *graphe aléatoire* la donnée d'une famille $(X_{i,j})_{\{i,j\}\in P_n}$ de $\dfrac{n(n-1)}{2}$ variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une même loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$.
On notera que $X_{i,j} = X_{j,i}$ car $\{i,j\} = \{j,i\}$.
Ainsi pour tout $\omega \in \Omega$, la famille $(X_{i,j}(\omega))_{\{i,j\}\in P_n}$ détermine un graphe dont les sommets sont $1, 2, \dots, n$ et les arêtes sont les paires $\{i,j\}$ telles que $X_{i,j}(\omega) = 1$.
On considère un graphe aléatoire $(X_{i,j})_{\{i,j\}\in P_n}$.
Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note $S_i = \sum\limits_{\substack{j\in[\![1,n]\!] \\ j\neq i}}^{n} X_{i,j}$ le nombre d'arêtes partant du sommet i.
On dit que S_i est le *degré* du sommet i.

7) Soit $i \in [\![1,n]\!]$,
   a) Quelle est la loi de S_i ? Quelle est son espérance ?
      On reconnaitra une loi usuelle
   b) En utilisant les résultats de la partie I, montrer que pour tout $x > 0$,
      $$\mathbf{P}\big(|S_i - (n-1)p| \geqslant (n-1)x\big) \leqslant 2e^{-2(n-1)x^2}$$

Dans la suite nous allons faire tendre le nombre n de sommets vers $+\infty$. La probabilité p d'existence d'une arête entre deux sommets donnés distincts sera choisie en fonction de n. On la notera p_n.
Remarquons que les variables S_i (ainsi que l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$) dépendent de n mais ceci ne sera pas reflété dans la notation.

8) On veut calculer la probabilité que tous les sommets aient un degré « proche » de la moyenne des degrés.
   Soit $\varepsilon > 0$. On note $Z_n = \bigcap\limits_{i\in[\![1,n]\!]} \big((1-\varepsilon)(n-1)p_n < S_i < (1+\varepsilon)(n-1)p_n\big)$.
   a) Montrer que $\mathbf{P}\big(\overline{Z_n}\big) \leqslant 2ne^{-2\varepsilon^2(n-1)p_n^2}$.
      On exprimera $\overline{Z_n}$ comme une union d'événements du type de ceux étudiés à la question 7.b en précisant la valeur de x choisie.
   b) En déduire que si pour tout entier $n \geqslant 2$, $p_n \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{\ln n}{n}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(Z_n) = 1$.

Nous allons voir dans cette fin de problème une suite de graphes aléatoires où la moyenne des degrés tend vers 1 mais où néanmoins la probabilité que d'au moins un sommet partent « nettement plus » qu'une arête ne tend pas vers 0.

9) Soient $B_1, \dots, B_n$ des événements. Montrer que
   $$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(B_i) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathbf{P}(B_i \cap B_j)$$
   On pourra procéder par récurrence.

10) a) Soit n un naturel tel que $n \geqslant 2$. Montrer qu'il existe un unique naturel $k_n \geqslant 1$ vérifiant $(k_n - 1)! < n \leqslant k_n!$.
    b) Montrer que la suite $(k_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante.
    c) Montrer que $k_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

d) Montrer que pour tout réel γ strictement positif, $k_n^\gamma = o(n)$.

Soit n un naturel tel que $n \geqslant 2$. On pose $p_n = \frac{1}{n}$ et (dans les notations précédentes) :

$$\alpha_n = \mathbf{P}(S_1 = k_n)$$

$$\beta_n = \mathbf{P}\left((S_1 = k_n) \cap (S_2 = k_n)\right)$$

$$\gamma_n = \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (S_i = k_n)\right)$$

On notera que pour des raisons de symétrie évidentes,

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \;\; \mathbf{P}(S_i = k_n) = \alpha_n \quad \text{et} \quad \forall i, j \in [\![1, n]\!] \;\; i \neq j \Rightarrow \mathbf{P}\left((S_i = k_n) \cap (S_j = k_n)\right) = \beta_n$$

11) a) Exprimer α_n en fonction de n et de k_n.

b) Montrer que $\alpha_n \underset{n \to \infty}{\sim} \dfrac{e^{-1}}{k_n!}$

NB : comme k_n varie avec n, ce résultat n'est pas la conséquence immédiate d'un théorème du cours.

12) a) Montrer que

$$\begin{aligned} \beta_n \;\; = \;\; & \frac{1}{n}\left(\binom{n-2}{k_n - 1}(1/n)^{k_n - 1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1-k_n}\right)^2 \\ & + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(\binom{n-2}{k_n}(1/n)^{k_n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-2-k_n}\right)^2 \end{aligned}$$

b) En déduire un équivalent (s'exprimant simplement à l'aide de k_n) de β_n quand n tend vers l'infini.

On pourra procéder rapidement en se référant aux raisonnements ayant permis de déterminer un équivalent de α_n.

13) En déduire que la suite (γ_n) ne converge pas vers zéro.