L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve
L'exercice et le problème sont indépendants
Ce sujet comporte 3 pages

Exercice I

Soit n un entier naturel. On pose $a_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{t}{t^2+1}\right)^n dt$.

On note R_a le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et S la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1. Soit $h : t \mapsto \dfrac{t}{t^2+1}$. Montrer que $\forall t \in [0,1], \quad h(t) \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   En déduire que $R_a \geqslant 2$.
2. Montrer que $R_a = 2$.
   On pourra minorer la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ par une suite simple.
3. Soit $x \in]-2,2[$.
   a) Montrer que $S(x) = 1 + x\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1-xt+t^2}dt$.
   b) Exprimer S sur $]-2,2[$ à l'aide des fonctions usuelles.
4. a) Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n(-2)^n$ converge. En déduire que S est continue sur $[-2,0]$.
   b) Déterminer $S(-2)$.
   On pourra utiliser que pour $X \in \mathbb{R}^*$, $\arctan(X) + \arctan(\frac{1}{X}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{sinon.} \end{cases}$

Problème

Soit I un intervalle de la forme $[-\alpha, \alpha]$ où α est un réel strictement positif. Dans tout le problème, on considère les ensembles suivants :

- $\mathscr{D}$ l'ensemble des fonctions f de la forme
$$f: \begin{array}{rcl} [-\alpha, \alpha] & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \end{array}$$
où la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ a un rayon de convergence R_a **strictement supérieur** à α.
- $\mathscr{P}$ l'ensemble des fonctions polynomiales sur I.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on note
$$f_n : x \mapsto x^n$$
définie sur $[-\alpha, \alpha]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note
$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^n \, dt$$
et si $f \in \mathscr{D}$, on note $u(f)$ et $v(f)$ les applications de I dans $\mathbb{C}$ définies par les formules
$$\forall x \in I, \ u(f)(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x\sin(t)) \, dt$$
$$\forall x \in I, \ v(f)(x) = f(0) + x \int_0^{\pi/2} f'(x\sin(t)) \, dt$$
Les notations $u(f(x))$ et $v(f(x))$ n'ont AUCUN sens et seront de ce fait sanctionnées

Partie I : Préliminaires

1. Justifier que $\mathscr{D}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{C})$ et que $\mathscr{P}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{D}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $u(f_n)$ et $v(f_n)$. On les exprimera en fonction des W_k pour $k \in \mathbb{N}$.
3. En déduire que $\mathscr{P}$ est stable par u et v.
4. Soit $f \in \mathscr{D}$ et $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall x \in I, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ où la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ a un rayon de convergence $R_a > \alpha$.
   a) Déterminer une suite $(b_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall x \in]-R_a, R_a[$, $\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x\sin(t))dt = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$.
   En déduire que $u(f)$ est bien définie et appartient à $\mathscr{D}$.
   b) En procédant de même montrer que $v(f)$ est bien définie et appartient à $\mathscr{D}$
5. Montrer que u et v sont des endomorphismes de $\mathscr{D}$.
6. Etablir pour $n \in \mathbb{N}$ une relation simple entre W_{n+2} et W_n. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$$
7. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Déterminer sa limite et donner un équivalent de cette suite.

Partie II : Les fonctions u et v sont-elles lipschitziennes ?

On considère la norme $\|.\|_\infty$ de $\mathscr{D}$ définie pour tout $f \in \mathscr{D}$ par la formule

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$$

8. Montrer que u est une application lipschitzienne de l'espace vectoriel normé $(\mathscr{D}, \|.\|_\infty)$ dans lui-même.
9. L'application v est-elle lipschitzienne de $(\mathscr{D}, \|.\|_\infty)$ dans lui-même ?
10. a) Vérifier que l'application $N : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ définie par $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ est une norme sur $\mathscr{D}$.
    b) Montrer que v est lipschitzienne de $(\mathscr{D}, N)$ dans $(\mathscr{D}, \|.\|_\infty)$.
    c) Les normes N et $\|.\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

Partie III : Étude de la bijectivité de u et v

11. Déterminer les restrictions de $u \circ v$ et $v \circ u$ à $\mathscr{P}$.
12. Déterminer $(u \circ v)(f)$ pour tout $f \in \mathscr{D}$.
13. Déterminer également $(v \circ u)(f)$ pour tout $f \in \mathscr{D}$. Conclure.
14. Dans cette question on suppose que $\alpha < 1$.
    a) Montrer que la restriction g à I de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ appartient à $\mathscr{D}$.
    Calculer $u(g)$ à l'aide du changement de variable $z = \tan(t)$.
    b) Pour tout $f \in \mathscr{D}$, donner une relation liant $v(f)$ et $u(f')$.
    c) Soit h la restriction à I de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Montrer que $h \in \mathscr{D}$ et en déduire $u(h')$.

Partie IV : Étude des valeurs propres de u et v

15. Justifier que 0 n'est valeur propre ni de u ni de v.
16. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Montrer que λ est une valeur propre de v si et seulement si $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de u. Qu'en est-il des vecteurs propres correspondants ?
17. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de u et v.
18. L'espace vectoriel $\mathscr{D}$ admet-il une base de vecteurs propres de u ? de v ?