Exercice I

1. Pour tout $t \geqslant 0$, on a par l'inégalité arithmético-géométrique : $\frac{1+t^2}{2} \geqslant \sqrt{1.t^2} = |t| = t$ et donc $\boxed{0 \leqslant \frac{t}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{2}.}$
   On peut aussi réaliser une étude de fonctions.
   Ainsi, par croissance de l'intégrale, on a pour tout naturel n,
   $$0 \leqslant a_n \leqslant \int_0^1 \frac{dt}{2^n} = \frac{1}{2^n}$$
   Donc pour tout $x \in]-2, 2[$: $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n x^n| = a_n |x|^n \leqslant \left(\frac{|x|}{2}\right)^n \leqslant 1$. La suite $(a_n x^n)$ est bornée donc $x \leqslant R_a$. On en déduit que $\boxed{R_a \geqslant 2}$
2. Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$
   $$a_n \geqslant \int_0^1 \frac{t^n}{2^n} dt = \frac{1}{(n+1)2^n}$$
   et donc
   $$a_n 2^n \geqslant \frac{1}{n+1}$$
   Comme la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n+1}$ diverge et est à termes positifs, la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n 2^n$ diverge.
   Donc $R_a \leqslant 2$ et ainsi $\boxed{R_a = 2}$.
3. Soit $x \in]-2, 2[$.
   a) On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $g_n : t \mapsto \left(\frac{xt}{1+t^2}\right)^n$. On a alors
   $$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 g_n(t) dt$$
   Pour tout $t \in [0, 1]$, la série numérique $\sum g_n(t)$ est géométrique et le module de sa raison est $\left|\frac{xt}{1+t^2}\right| \leqslant \frac{|x|}{2} < 1$. Ainsi la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} g_n$ converge simplement sur $[0, 1]$ et sa somme est $g : t \mapsto \frac{1}{1-\frac{xt}{1+t^2}} = \frac{1+t^2}{1+t^2-xt}$.
   De plus les g_n et g sont continues sur $[0, 1]$.
   Enfin, la série numérique $\sum \int_0^1 |g_n(t)| dt$ a pour terme général $\int_0^1 \left(\frac{|x|t}{1+t^2}\right)^n dt \leqslant \left(\frac{|x|}{2}\right)^n$, donc converge.
   Par le théorème de Lebesgue d'intégration terme à terme,
   $$S(x) = \int_0^1 g(t) dt = \int_0^1 \frac{1+t^2}{1+t^2-xt} dt = \boxed{1 + x \int_0^1 \frac{t}{1-xt+t^2} dt.}$$
   b) Dans l'intégrale précédente, le dénominateur est un trinôme en t du second degré de discriminant $x^2 - 4 < 0$, donc est strictement positif (car du signe de 1).

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{t}{1-xt+t^2}dt &= \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}(2t-x)+\frac{x}{2}}{t^2-xt+1}dt \\
&= \frac{1}{2}[\ln(t^2-xt+1)]_{t=0}^1 + \frac{x}{2}\int_0^1 \frac{1}{(t-\frac{x}{2})^2+\frac{4-x^2}{4}}dt \\
&= \frac{\ln(2-x)}{2} + \frac{x}{2}\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\left[\arctan\frac{2(t-\frac{x}{2})}{\sqrt{4-x^2}}\right]_{t=0}^1 \\
&= \frac{\ln(2-x)}{2} + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\left(\arctan\frac{2-x}{\sqrt{4-x^2}} - \arctan\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\right) \\
&= \frac{\ln(2-x)}{2} + \frac{x}{\sqrt{(2-x)(2+x)}}\left(\arctan\sqrt{\frac{2-x}{2+x}} - \arctan\frac{-x}{\sqrt{(2-x)(2+x)}}\right)
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$
\boxed{S(x) = 1 + x\left(\frac{\ln(2-x)}{2} + \frac{x}{\sqrt{(2-x)(2+x)}}\left(\arctan\sqrt{\frac{2-x}{2+x}} - \arctan\frac{-x}{\sqrt{(2-x)(2+x)}}\right)\right)}
$$

4. a) • La série $\sum_{n\geqslant 0} a_n(-2)^n$ est alternée car les a_n sont positifs.

• La suite de fonctions $\left(h_n : t \mapsto \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^n\right)$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1[$ car pour tout $t \in [0,1[$ on a

$$0 \leqslant \frac{2t}{1+t^2} < 1$$

car $1+t^2-2t = (t-1)^2 > 0$.
De plus, pour tout $t \in [0,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|h_n(t)| = h_n(t) \leqslant 1^n = 1$.
Enfin, les fonctions h_n, la fonction nulle et la fonction $\varphi : t \mapsto 1$ sont continues sur $[0,1[$ et φ est intégrable sur $[0,1[$.
Par le théorème de convergence dominée, on a donc

$$a_n 2^n = \int_{[0,1[} h_n(t)dt \underset{n\to\infty}{\to} \int_{[0,1[} 0.dt = 0$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a_n 2^n = \int_0^1 \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^n dt \leqslant \int_0^1 \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^{n+1} dt = a_{n+1}2^{n+1}$$

par croissance de l'intégrale et car $0 \leqslant \frac{2t}{1+t^2} \leqslant 1$ d'après la question 1).
Donc la suite $(|a_n(-2)^n)|)_{n\geqslant 0}$ décroît.
• Ainsi, par le théorème des séries alternées, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n(-2)^n$ converge.
On en déduit, par le théorème d'Abel radial, que la fonction $\boxed{S \text{ est définie est continue sur } [-2,0]}$.

b) Par la question précédente,

$$S(-2) = \lim_{x\to(-2)^+} S(x)$$

Or pour $x \in]-2,2[$, en utilisant la relation donnée par l'énoncé,

$$S(x) = 1 + x\left(\frac{\ln(2-x)}{2} + \frac{x}{\sqrt{(2-x)(2+x)}}\left(-\arctan\sqrt{\frac{2+x}{2-x}} + \arctan\frac{\sqrt{(2-x)(2+x)}}{-x}\right)\right)$$

Or

$$-\arctan\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}+\arctan\frac{\sqrt{(2-x)(2+x)}}{-x} = -\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}+\frac{\sqrt{(2-x)(2+x)}}{-x}+o_{x\to(-2)^+}(\sqrt{2+x})$$

Ainsi

$$S(x) = 1 + x\left(\frac{\ln(2-x)}{2} + \frac{x}{\sqrt{(2-x)}}\left(-\sqrt{\frac{1}{2-x}} + \frac{\sqrt{(2-x)}}{-x} + o_{x\to(-2)^+}(1)\right)\right)$$

D'où

$$\begin{aligned} S(-2) &= 1-2\left(\frac{\ln 4}{2} + \frac{-2}{\sqrt{4}}\left(-\sqrt{\frac{1}{4}} + \frac{\sqrt{4}}{2}\right)\right) \\ &= 1-2\left(\frac{\ln 4}{2} - \frac{1}{2}\right) = \boxed{2 - 2\ln 2} \end{aligned}$$

N.B. On pouvait aussi utiliser la version à paramètre continu du théorème de convergence dominée (en vérifiant ses hypothèses) pour passer à la limite dans l'expression intégrale de $S(x)$ établie en 3)a), puis calculer l'intégrale correspondante.

Problème

Partie I : Préliminaires

1. Notons que $\mathscr{D}$ n'est pas vide car, par exemple, $f_0 \in \mathscr{D}$. Soit $f \in \mathscr{D}$ donnée par une série entière de rayon de convergence $R > \alpha$. On sait que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ donc sur $[-\alpha,\alpha]$.
Soit f_1, f_2 dans $\mathscr{D}$ données par des séries entières de rayon de convergence R_1 et R_2 respectivement. On sait que pour λ_1, λ_2 dans $\mathbb{C}$, la fonction $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est définie par un série entière de rayon de convergence $R \geqslant \min(R_1, R_2) > \alpha$. La fonction $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ appartient donc à $\mathscr{D}$.
Notons que $\mathscr{P}$ n'est pas vide car, par exemple, $f_0 \in \mathscr{P}$. Les éléments de $\mathscr{P}$ sont des éléments de $\mathscr{D}$, en effet pour $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{d} a_n x^n$, en posant pour tout entier $n > d$, $a_n = 0$, la fonction f est de la forme $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. De plus le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant} a_n x^n$ est égal à $+\infty$; il est donc supérieur à α.
Soit f_1, f_2 deux fonctions polynomiales et λ_1, λ_2 deux scalaires. La fonction $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est encore polynomiale donc $\mathscr{P}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{D}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in I : u(f_n)(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^n \sin^n(t)dt = \dfrac{2W_n}{\pi}x^n$. Cela signifie que $\boxed{u(f_n) = \dfrac{2W_n}{\pi} f_n}$.
De même, $v(f_0)(x) = 1$ et pour $n \geqslant 1$
$$w(f_n)(x) = f_n(0) + x\int_0^{\pi/2} n x^{n-1}\sin^{n-1}(t)dt = nW_{n-1}x^n.$$
Cela signifie que $\boxed{v(f_n) = \begin{cases} f_0 & \text{si } n = 0 \\ nW_{n-1} f_n & \text{sinon} \end{cases}}$.

3. Soit $f \in \mathscr{P}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ et $(\lambda_0, \ldots, \lambda_N) \in \mathbb{C}^{N+1}$ tels $f = \sum\limits_{n=0}^{N} \lambda_n f_n$.

   D'après la question ci-dessus,

$$u(f) = \sum_{n=0}^{N} \frac{2W_n \lambda_n}{\pi} f_n \in \mathscr{P} \quad \text{et} \quad v(f) = \lambda_0 f_0 + \sum_{n=1}^{N} nW_{n-1}\lambda_n f_n \in \mathscr{P}$$

   Cela implique que $\boxed{\mathscr{P} \text{ est stable par } u \text{ et } v}$.

4. Soit $f \in \mathscr{D}$.

   a) Soit $x \in I$,

$$u(f)(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sin^n t \right) dt$$

   Posons, pour tout entier n, $g : t \mapsto a_n x^n \sin^n t$ définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Appliquons le théorème d'interversion série-intégrale version convergence uniforme des séries de fonctions (on peut aussi appliquer le théorème de Lebesgue).

   — Les fonctions g_n sont continues sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

   — Pour tout entier n, la fonction $t \mapsto |g_n(t)| = |a_n x^n| \sin^n t$ est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ d'où $||g_n||_\infty = |a_n x^n|$. Or la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} |a_n x^n|$ converge car $x \leqslant \alpha < R$. La série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 0} g_n$ converge donc normalement donc uniformément sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

   On en déduit que $u(f)(x) = \dfrac{2}{\pi} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t dt \right) a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ où $\boxed{b_n = \dfrac{2a_n W_n}{\pi}}$

   Pour $x \in I$, la fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ (car de classe $\mathscr{C}^\infty$ d'après 1.) sur I donc sur $[-|x|, |x|]$. Comme $t \mapsto x \sin t$ est continue de $[0, \frac{\pi}{2}]$ et à valeurs dans $[-|x|, |x|]$, $t \mapsto f(x \sin t)$ et $t \mapsto f'(x \sin t)$ sont des fonctions continues sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On en déduit que $u(f)$ est définie sur I.

   Le calcul ci-dessus peut aussi s'écrire pour $x \in]-R, R[$. La série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} b_n x^n$ a donc un rayon de convergence au moins égal à R et donc il est strictement supérieur à α. On a donc $u(f) \in \mathscr{D}$.

   b) On procède de même pour $v(f)$. On pose cette fois, pour $n \geqslant 1$, $h_n : t \mapsto n a_n x^n \sin^{n-1} t$, on a alors $||h_n|| = n|a_n x^n|$ et pour tout $x < R$ la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} n|a_n x^n|$ converge car la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} n a_n x^n$ a aussi R pour rayon de convergence. On en déduit que pour $x \in I$

$$v(f)(x) = a_0 + \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n \sin^{n-1} t \right) dt = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} t dt \right) a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

   où $c_n = \begin{cases} a_0 & \text{si } n = 0 \\ nW_{n-1} a_n & \text{sinon.} \end{cases}$

   Comme ci-dessus, $v(f) \in \mathscr{D}$.

5. Le fait que u et v soient linéaires découle de la linéarité de l'intégrale et de la dérivation.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$, on procède à une intégration par parties :

$$W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin t \times \sin^{n+1} t dt = \left[-\cos t \times \sin^{n+1} t \right]_0^{\pi/2} - (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \times \sin^n t dt.$$

   Le crochet étant nul,

$$W_{n+2} = (n+1) \int_0^{\pi/2} (\sin^2 t - 1) \times \sin^n t dt = (n+1)(W_{n+2} - W_n).$$

Finalement $\boxed{(n+1)W_n = (n+2)W_{n+2}}$.
Si on pose alors pour tout entier n, $w_n = (n+1)W_nW_{n+1}$, en utilisant ce qui précède,

$$w_n = (n+1)W_nW_{n+1} = (n+2)W_{n+2}W_{n+1} = w_{n+2}.$$

La suite (w_n) est constante. De ce fait, pour tout entier n,

$$w_n = W_0 \times W_1 = \left(\int_0^{\pi/2} \sin^0 t dt\right) \times \left(\int_0^{\pi/2} \sin^1 t dt\right) = \frac{\pi}{2}$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{W_nW_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}}$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \times (1 - \sin t) dt$$

Or $t \mapsto \sin^n t \times (1 - \sin t)$ est une fonction négative sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ sui n'est pas identiquement nulle. Comme elle est de plus continue, $W_{n+1} - W_n > 0$ ce qui implique que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
En remarquant que W_n ne s'annule pas, la stricte décroissance permet d'écrire que pour $n \geqslant 0$,

$$1 = \frac{W_n}{W_n} > \frac{W_{n+1}}{W_n} > \frac{W_{n+2}}{W_n} = \frac{n+1}{n+2}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, le terme de droite tend vers 1. De ce fait, $\frac{W_{n+1}}{W_n}$ tend vers 1 par encadrement ce qui signfie que $W_{n+1} \sim W_n$. En utilisant alors la formule démontrée à la question 5.

$$W_n^2 \sim W_nW_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

Cela implique $\boxed{W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$.
En particulier la suite (W_n) tend vers 0.

Partie II : Les fonctions u et v sont-elles lipschitzienne ?

8. Soit $f \in \mathscr{D}$. Pour tout $x \in I$,

$$|u(f)(x)| = \left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(x\sin t)dt\right| \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} |f(x\sin t)|\, dt \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} ||f||_\infty dt \leqslant ||f||_\infty.$$

Cela implique que $||u(f)||_\infty \leqslant ||f||_\infty$ et donc que u est lipschitzienne de $(\mathscr{D}, ||.||_\infty)$ dans lui-même.

9. On a vu que pour tout entier n non nul, $v(f_n) = nW_{n-1}f_n$. Cela implique que $||v(f_n)||_\infty = nW_{n-1}||f_n||_\infty$. Or

$$nW_{n-1} \sim (n-1)\sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \sim \sqrt{\frac{n\pi}{2}}$$

Cela implique que le rapport $\dfrac{||v(f_n)||_\infty}{||f_n||_\infty}$ tend vers $+\infty$.
La fonction v $\boxed{\text{n'est pas lipschitzienne de } (\mathscr{D}, ||.||_\infty) \text{ dans lui-même}}$.

10. a) Vérifions les axiomes classiques
   - N est positive ($N(f) \geqslant 0$ comme somme de quantités positives).
   - N vérifie l'axiome de séparation (si $N(f) = 0$ alors $||f||_\infty = 0$ et donc $f = 0$ car $||.||_\infty$ est une norme).
   - N est homogène car $||.||_\infty$ l'est et car la dérivation est linéaire.
   - N vérifie l'inégalité triangulaire car c'est le cas pour $||.||_\infty$ et car la dérivation est linéaire.

   b) Soit $f \in \mathscr{D}$. Soit $x \in I$,

$$|v(f)(x)| = \left| f(0) + x \int_0^{\pi/2} f'(x \sin t) dt \right| \leqslant |f(0)| + \alpha \int_0^{\pi/2} |f'(x \sin t)|\, dt \leqslant ||f||_\infty + \alpha \int_0^{\pi/2} ||f'||_\infty dt$$

   On en déduit que

$$|v(f)(x)| \leqslant ||f||_\infty + \frac{\alpha\pi}{2} ||f'||_\infty \leqslant KN(f)$$

   où $\boxed{K = \max(1, \frac{\alpha\pi}{2}).}$

   Cela montre que $\boxed{v \text{ est lipschitzienne de } (\mathscr{D}, N) \text{ dans } (\mathscr{D}, ||.||_\infty)}$.

   c) Si les normes N et $||.||_\infty$ était équivalente, le fait que v de $(\mathscr{D}, N)$ dans $(\mathscr{D}, ||.||_\infty)$ soit lipschitzienne serait équivalent au fait que v de $(\mathscr{D}, ||.||_\infty)$ dans $(\mathscr{D}, ||.||_\infty)$ le soit. Ce n'est pas le cas donc N et $||.||_\infty$ ne sont pas équivalentes sur $\mathscr{D}$.
   Les normes N et $||.||_\infty$ sont-elles équivalentes ?

Partie III : Étude de la bijectivité de u et v

11. En utilisant les formules démontrées à la question 2, on obtient

$$u(v(f_0)) = u(f_0) = \frac{2}{\pi} W_0 f_0 = f_0 \quad \text{et} \quad v(f_0) = v(f_0) = f_0$$

car $W_0 = \frac{\pi}{2}$.
De même, si $n \geqslant 1$,

$$u(v(f_n)) = u(nW_{n-1} f_n) = \frac{2nW_{n-1}W_n}{\pi} f_n = f_n$$

en utilisant le résultat de la question 5. On trouve aussi de la même façon,

$$v(u(f_n)) = v\left(\frac{2W_n}{\pi} f_n\right) = \frac{2nW_{n-1}W_n}{\pi} f_n = f_n.$$

12. Soit $f \in \mathscr{D}$. Notons $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n x^n$ la série entière (de rayon de convergence $R > \alpha$) qui définie f. En reprenant les calculs de la question 4, $u(f)$ est définie par la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} b_n x^n$ où $b_n = \dfrac{2a_n W_n}{\pi}$ et $v(f)$ est définie par la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} c_n x^n$ où $c_n = \begin{cases} a_0 & \text{si } n = 0 \\ nW_{n-1} a_n & \text{sinon.} \end{cases}$
Pour calculer la série entière qui défini $u(v(f))$ on est donc ramené aux mêmes calculs qu'à la question précédente d'où $\boxed{u(v(f)) = f.}$

13. De même, $\boxed{v(u(f)) = f.}$
On a donc montré que $u \circ v = \mathsf{id}_{\mathscr{D}}$ et $v \circ u = \mathsf{id}_{\mathscr{D}}$ ce qui signifie que u et v sont bijectives et inverses l'une de l'autre.

14. Soit $\alpha < 1$.

a) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est développable sur $]-1,1[$ en série géométrique de raison $-x^2$ (car $|-x^2| < 1$) donc est développable en série entière sur cet intervalle. Comme $\alpha < 1$, $(I \ni x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}) \in \mathscr{D}$.

Soit $x \in I$,

$$u(g)(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + x^2 \sin^2 t}.$$

On pose $z = \tan t \iff t = \arctan z$ où $z \mapsto \arctan t$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

On remarque que $\sin^2 t = 1 - \cos^2 = 1 - \dfrac{1}{1+z^2} = \dfrac{z^2}{1+z^2}$ d'où

$$u(g)(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dz}{(1+z^2)\left(1 + \dfrac{x^2 z^2}{1+z^2}\right)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dz}{1 + (1+x^2)z^2}$$

On pose alors le changement de variables affine $\theta = \sqrt{1+x^2}z$ et on obtient

$$u(g)(x) = \frac{2}{\pi\sqrt{1+x^2}} \int_0^{+\infty} \frac{d\theta}{1+\theta^2} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

b) Soit $f \in \mathscr{D}$ et $x \in I$,

$$v(f)(x) = f(0) + x \int_0^{\pi/2} f'(x \sin t) dt = f(0) + \frac{\pi}{2} x u(f')(x).$$

c) D'après le cours, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-1/2}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ donc $h \in \mathscr{D}$ car $\alpha < 1$.

En appliquant le résultat de la question précédente, et le fait que comme $u(g) = h$ alors $v(h) = g$, pour tout $x \in I$,

$$u(h')(x) = \frac{2}{\pi x}\left(v(h)(x) - h(0)\right) = \frac{2}{\pi x}\left(g(x) - h(0)\right) = \frac{2}{\pi x}\left(\frac{1}{1+x^2} - 1\right)$$

On obtient donc $\boxed{u(h')(x) = \dfrac{-2x}{\pi(1+x^2)}}$

Partie IV : Étude des valeurs propres de u et v

15. Comme u et v sont bijectives, 0 n'est valeur propre ni de u ni de v.

16. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. On suppose que λ est une valeur propre de v et on note $f \in \mathscr{D}$, un vecteur propre non nul associé. Alors $v(f) = \lambda f$ et donc $u(v(f)) = \lambda u(f)$. En utilisant $u \circ v = \mathsf{id}_{\mathscr{D}}$ et en divisant par λ (non nul d'après la question précédente) on obtient que $u(f) = \frac{1}{\lambda} f$. Cela implique que $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de u.

En utilisant cette fois que $v \circ u = \mathsf{id}_{\mathscr{D}}$ on obtient de même que si $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de u alors λ est une valeur propre de v.

On en déduit que λ est une valeur propre de v si et seulement si $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de u. De plus dans ce cas, $E_\lambda(v) = E_{\frac{1}{\lambda}}(u)$ où $E_\lambda(v)$ et $E_{\frac{1}{\lambda}}(u)$ désignent les espaces propres de v (resp. de u) associés à la valeur propre λ (resp. $\frac{1}{\lambda}$).

17. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de u et $f \in \mathscr{D}$ un vecteur propre (donc non nul) associé. Notons $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ la série entière définissant f. On a vu à la question 4 que $u(f)$ était la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} b_n x^n$ où, pour tout entier n, $b_n = \dfrac{2a_n W_n}{\pi}$.
Par unicité du développement en série entière, on déduit de la relation $u(f) = \lambda f$ que pour tout entier n,
$$\frac{2a_n W_n}{\pi} = \lambda a_n.$$
En particulier, s'il existe n, m distincts tels que $a_n \neq 0$ et $a_m \neq 0$, $\lambda = \dfrac{2W_n}{\pi}$ et $\lambda = \dfrac{2W_m}{\pi}$ ce qui est absurde car (W_n) étant strictement décroissante $W_n \neq W_m$.
Cela signifie que f est nécessairement une fonction de la forme f_n où $n \in \mathbb{N}$.
Finalement, l'ensemble des valeurs propres de u est l'ensemble $\left\{\dfrac{2W_n}{\pi}\ ,\ n \in \mathbb{N}\right\}$.
De plus, pour $\lambda = \dfrac{2W_n}{\pi}$, $E_\lambda(u) = \mathsf{Vect}(f_n)$.
En utilisant la question 16, on obtient que l'ensemble des valeurs propres de v est l'ensemble $\left\{\dfrac{\pi}{2W_n}\ ,\ n \in \mathbb{N}\right\}$ et que si $\lambda = \dfrac{\pi}{2W_n}$, $E_\lambda(v) = \mathsf{Vect}(f_n)$.
18. L'espace vectoriel $\mathscr{D}$ n'admet pas une base de vecteurs propres de u. En effet la famille des vecteurs propres de u est la familles des fonctions f_n et $\mathsf{Vect}(f_0, f_1, f_2, \ldots) = \mathscr{P}$ et $\mathscr{P}$ est strictement inclus dans $\mathscr{D}$. En effet, la restriction de $x \mapsto \exp(x)$ à I appartient à $\mathscr{D}$ et pas à $\mathscr{P}$. Il en est de même pour v.