Calculatrices interdites. L'exercice et le problème sont indépendants.

Exercice

Soit E l'espace vectoriel des fonctions définies et continues de $[0, \frac{\pi}{2}]$ dans $\mathbb{R}$.
Pour tout réel k, on note $\tilde{k} \in E$ la fonction constante égale à k.
On rappelle que la norme infinie $\|\cdot\|_\infty$ sur E est définie par

$$\forall f \in E,\ \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]} |f(x)|$$

Pour $f \in E$, on considère la fonction $T(f)$ définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par

$$T(f) : x \mapsto \int_0^x f(t)\cos(t)\mathrm{d}t$$

1) Montrer que pour $f \in E$, $T(f) \in E$ puis que $T : f \mapsto T(f)$ est un endomorphisme de E.
2) a) Calculer $T(\tilde{1})$.
   b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

   $$T^n(\tilde{1})(x) = \frac{1}{n!}(\sin(x))^n$$

   On rappelle que T^n désigne $\underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{n \text{ fois}}$
3) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ l'équation différentielle

$$y'(x) = \alpha\cos(x)y(x) \qquad (\mathrm{H}_\alpha)$$

4) Déterminer $\mathrm{Ker}(T)$. Le réel 0 est-il valeur propre de T ?
5) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On considère une fonction $f \in E$ telle que $T(f) = \lambda f$
   a) Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et que f est solution de l'équation différentielle H_α pour un réel α à déterminer.
   b) Calculer $f(0)$ et en déduire que λ n'est pas une valeur propre de T.
6) a) Montrer que pour tout $f \in E$, $\|T(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$.
   b) En déduire que T est lipschitzienne et déterminer sa norme subordonnée $\|T\|_{\mathrm{op}}$.
   On pourra utiliser la question 2.a.
7) Soit f, g deux fonctions de E telles que $0 \leqslant |f| \leqslant g$.
   a) Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

   $$|T(f)(x)| \leqslant T(|f|)(x) \leqslant T(g)(x)$$

   b) En déduire que pour tout entier naturel n,

   $$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ |T^n(f)(x)| \leqslant T^n(g)(x)$$

8) En déduire que pour toute fonction $f \in E$, la suite $(T^n(f))_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers $\tilde{0}$.
   On pourra utiliser la question 2.b

Problème

Objectifs

Le but de ce problème est d'étudier la fonction dilogarithme.
On admet et on pourra utiliser librement l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Partie I - Existence et premières propriétés de la fonction dilogarithme

Soit $x \in]-\infty, 1]$, on considère la fonction f_x définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f_x : t \mapsto \frac{t}{e^t - x}$$

1) Justifier que pour tout $x \in]-\infty, 1]$, la fonction f_x est bien définie sur $]0, +\infty[$.
2) Montrer que la fonction f_1 est intégrable sur $]0, +\infty[$.
3) Soit $x \in]-\infty, 1]$. En comparant les fonctions f_x et f_1, montrer que f_x est intégrable sur $]0, +\infty[$.

D'après les résultats précédents, on peut définir la fonction $L :]-\infty, 1] \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]-\infty, 1], \quad L(x) = x \int_0^{+\infty} f_x(t)\mathrm{d}t$$

Cette dernière est appelée fonction dilogarithme.

4) À l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que

$$\lim_{x \to 1^-} \int_0^{+\infty} f_x(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f_1(t)\mathrm{d}t$$

En déduire que la fonction L est continue à gauche en 1.

Partie II - Développement en série entière

Dans cette partie, on montre que la fonction L est développable en série entière sur $[-1, 1]$.
On considère un nombre réel $x \in [-1, 1]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $s_n :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad s_n(t) = te^{-(n+1)t}x^n$$

5) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} s_n(t)\mathrm{d}t$ converge et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} s_n(t)\mathrm{d}t = \frac{x^n}{(n+1)^2}$.
6) Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} s_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) = f_x(t)$$

7) Déduire des questions précédentes que :

$$L(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

8) Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, on a $L(x) + L(-x) = \frac{1}{2} L\left(x^2\right)$.

9) Déduire des questions précédentes les valeurs de $L(1)$ et $L(-1)$.

Partie III - Une autre propriété

Dans cette partie, on considère la fonction $h :]0, 1[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad h(x) = L(x) + L(1 - x) + \ln(x) \ln(1 - x)$$

10) Justifier que la fonction L est dérivable sur $] - 1, 1[$ et montrer que l'on a :

$$\forall x \in] - 1, 1[, \quad L'(x) = \begin{cases} -\frac{\ln(1-x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

11) La restriction à $[-1, 1]$ de la fonction L est-elle dérivable en -1 ? en 1 ?

12) Montrer que la fonction h est constante sur $]0, 1[$.

13) Montrer que $h(x) = L(1)$ pour tout $x \in]0, 1[$.

14) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{2\mathrm{e}^t - 1} \, \mathrm{d}t$.