Exercice

1) Soit $f \in E$, la fonction $t \mapsto f(t)\cos(t)$ est continue. D'après le théorème fondamental de l'analyse, $T(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ donc continue.
Soit $f, g \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,
$$T(\lambda f + \mu g)(x) = \int_0^x \lambda f(t)\cos(t) + \mu g(t)\cos(t)\mathrm{d}t = \lambda T(f)(x) + \mu T(g)(x)$$
On a donc $T(\lambda f + \mu g) = \lambda T(f) + \mu T(g)$ ce qui montre que T est un endomorphisme de E.

2) a) Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,
$$T(\tilde{1})(x) = \int_0^x \cos(t)\mathrm{d}t = [\sin(t)]_0^x = \sin(x)$$
b) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n(\tilde{1}) : x \mapsto \dfrac{1}{n!}(\sin x)^n$.
— Pour $n = 0$. Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,
$$T^0(\tilde{1})(x) = \tilde{1}(x) = 1 = \frac{1}{0!}(\sin x)^0$$
— Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose la propriété vérifié au rang n. On a alors pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$
$$\begin{aligned} T^{n+1}(\tilde{1})(x) &= T(T^n(\tilde{1}))(x) \\ &= \frac{1}{n!}\int_0^x (\sin t)^n \cos(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{n!}\left[\frac{(\sin t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^x \\ &= \frac{1}{(n+1)!}(\sin x)^{n+1} \end{aligned}$$

3) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'équation différentielle (H_α) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène. Comme $x \mapsto \alpha\cos(x)$ est continue et que $x \mapsto \alpha\sin(x)$ en est une primitive, les solutions de (H_α) sont de la forme
$$y : x \mapsto K\exp(\alpha\sin(x)) \text{ où } K \in \mathbb{R}$$

4) Soit $f \in \mathrm{Ker}(T)$. On a $T(f) = \tilde{0}$. En dérivant, on obtient que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(x)\cos(x) = T(f)'(x) = 0$. Cela montre que $f(x) = 0$ pour $x \neq \frac{\pi}{2}$ et finalement que $f = \tilde{0}$ par continuité de f. On a donc $\mathrm{Ker}(T) = \{\tilde{0}\}$. En particulier, 0 n'est pas une valeur propre de T.

5) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
a) D'après la question 1), $T(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$. Comme $f = \frac{1}{\lambda}T(f)$, on a aussi f de classe $\mathscr{C}^1$. En dérivant alors la relation $T(f) = \lambda f$ on obtient que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(x)\cos(x) = \lambda f'(x)$. Cela implique que f vérifie l'équation différentielle $(\mathrm{H}_{1/\lambda})$.
b) On a $f(0) = \frac{1}{\lambda}T(f)(0) = 0$. En utilisant la forme des solutions trouvée à la question 3) on voit que $f = \tilde{0}$ et donc λ n'est pas une valeur propre de T.

6) a) Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$|T(f)(x)| = \left|\int_0^x f(t)\cos(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^x |f(t)|\cos(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \|f\|_\infty \cos(t)\mathrm{d}t$$

On en déduit que

$$|T(f)(x)| \leqslant \|f\|_\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\underset{\cdot}{\mathrm{t}} = \|f\|_\infty$$

Donc $\|T(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$.

b) Comme T est linéaire, le résultat ci-dessus montre que T est 1-lipschitzienne. De plus pour $f = \tilde{1} \in E$, on a $\|f\|_\infty = \|T(\tilde{1})\|_\infty = 1$ car $T(\tilde{1}) : x \mapsto \sin(x)$. On en déduit que $\|T\|_{\text{op}} = 1$.

7) Soit f, g deux fonctions de E telles que $0 \leqslant |f| \leqslant g$.

a) Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$|T(f)(x)| = \left|\int_0^x f(t)\cos(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^x |f(t)|\cos(t)\mathrm{d}t = T(|f|)(x)$$

De plus,

$$T(|f|)(x) = \int_0^x |f(t)|\cos(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x g(t)\cos(t)\mathrm{d}t = T(g)(x)$$

b) On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

— Pour $n = 0$, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$|T^0(f)(x)| = |f(x)| \leqslant g(x) = T^0(g)(x)$$

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang n. On a donc que $0 \leqslant |T^n(f)| \leqslant T^n(g)$. En appliquant la question ci-dessus, on obtient que

$$|T^{n+1}(f)| = |T(T^n(f))| \leqslant T(T^n(g)) = T^{n+1}(g)$$

8) Soit $f \in E$, on pose $g = \|f\|_\infty \tilde{1}$. On a, par définition, $0 \leqslant |f| \leqslant g$. On en déduit que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\|T^n(f)\|_\infty \leqslant \|T^n(g)\|_\infty = \|f\|_\infty \times \|T^n(\tilde{1})\|_\infty \underset{(2.b)}{=} \frac{\|f\|_\infty}{n!} \to 0$$

Problème

Partie I - Existence et premières propriétés de la fonction dilogarithme

1) Soit $x \leqslant 1$.
Soit $t > 0$, $e^t > 1$ et donc pour tout $x \leqslant 1$, $-x \geqslant 1$ et donc $e^t - x > 0$
Ainsi f_x est bien définie sur $]0, +\infty[$ comme rapport de deux fonctions à dénominateur non nul.

2) D'abord la fonction f_1 est continue $]0, +\infty[$.

   — Au voisinage de $+\infty$. On voit que

$$t^2 f_1(t) = \frac{t^3}{e^t - 1} \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{t^3}{e^t} \longrightarrow 0$$

   On en déduit que, $f_1(t) = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc f_1 aussi.

   — Au voisinage de 0. Par un équivalent classique

$$f_1(t) = \frac{t}{e^t - 1} \underset{0}{\sim} \frac{t}{t} = 1$$

   La fonction f_1 se prolonge par continue en 0. Elle est donc intégrable sur $]0, 1]$.

   Finalement f_1 est intégrable sur $]0, +\infty[$.

3) Soit $x \in]-\infty, 1]$. On a $-x \geqslant -1$ et donc $e^t - x \geqslant e^t - 1 > 0$. On en déduit que

$$0 < f_x(t) \leqslant f_1(t)$$

   Comme f_1 est intégrable sur $]0, +\infty[$ par comparaison de fonctions positives f_x est intégrable sur $]0, +\infty[$.

4) On veut appliquer la version continue du théorème de convergence dominée.

   — Pour tout $t \in]0, +\infty[$,

$$\lim_{x \to 1^-} f_x(t) = \lim_{x \to 1^-} \frac{t}{e^t - x} = \frac{t}{e^t - 1} = f_1(t)$$

   — Domination. Pour tout $x \in]-\infty, 1]$ et tout $t \in]0, +\infty[$,

$$|f_x(t)| = f_x(t) \leqslant f_1(t)$$

   De plus, $f_1 \in L^1(]0, +\infty[)$ d'après la question 2.

   Par le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{x \to 1^-} \int_0^{+\infty} f_x(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f_1(t)\mathrm{d}t$$

   On vient de montrer que $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f_x(t)\mathrm{d}t$ et continue sur 1^- ; comme $x \mapsto x$ est aussi continue sur 1^-, par produit, L est continue en 1^-.

Partie II - Développement en série entière

5) Soit $x \in [-1,1]$ et $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité, on ne s'intéresse qu'à la convergence et au calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-(n+1)t}\mathrm{d}t$.

La fonction $t \mapsto te^{-(n+1)t}$ est continue sur $[0,+\infty[$. De plus,

$$t^2 \times te^{-(n+1)t} = t^3 e^{-(n+1)t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Cela montre que $te^{-(n+1)t} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. On montre alors que c'est une fonction intégrable sur $[1,+\infty[$ et donc sur $\mathbb{R}_+$ comme à la question 2.

On réalise le calcul par intégration par parties.

Sous réserve de convergence du crochet,

$$\int_0^{+\infty} te^{-(n+1)t}\mathrm{d}t = \left[-\frac{te^{-(n+1)t}}{n+1}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{n+1}e^{-(n+1)t}\mathrm{d}t$$

On voit que le crochet converge et vaut 0 car $te^{-(n+1)t} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On en déduit que

$$\int_0^{+\infty} te^{-(n+1)t}\mathrm{d}t = \left[-\frac{te^{-(n+1)t}}{n+1}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{n+1}e^{-(n+1)t}\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)^2}$$

La dernière égalité découlant d'une simple primitivation.

En multipliant finalement par la constante x^n, on a bien :

$$\int_0^{+\infty} s_n(t)\mathrm{d}t = \frac{x^n}{(n+1)^2}$$

6) Pour $x \in [-1,1]$ fixé. Pour tout $t > 0$, la série $\sum_{n\geqslant 0} e^{-nt}x^n$ est une série géométrique de raison $q = e^{-t}x$. Comme $|q| \in [0,1[$ elle converge et

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt}x^n = \frac{1}{1-e^{-t}x}$$

En multipliant par te^{-t},

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} te^{-(n+1)t}x^n = \frac{et^{-t}}{1-e^{-t}x} = \frac{t}{e^t - x} = f_x(t)$$

7) Xomme $x \in [-1,1]$, $\left|\dfrac{x^n}{n^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente.

Ainsi $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}$ converge absolument et donc elle converge.

On peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme. On pose $u_n : t \mapsto xs_n(t)$.

- La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge simplement et sa somme est $t \mapsto xf_x(t)$.
- Pour tout $n \geqslant 0$, u_n est intégrable sur $]0,+\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} |u_n(t)|\mathrm{d}t = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^2}$$

— La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^2}$ converge.

Par intégration terme à terme

$$L(x) = \int_0^{+\infty} x f_x(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} x s_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

8) Soit $x \in [-1, 1]$, d'abord $-x \in [-1, 1]$, on somme alors deux séries convergentes,

$$L(x) + L(-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n(1 + (-1)^n)}{n^2}$$

Ainsi

$$L(x) + L(-x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2x^{2p}}{(2p)^2} = \frac{1}{2}L\left(x^2\right)$$

9) On sait que $L(1) = \frac{\pi^2}{6}$ par le résultat donné en tout début d'énoncé.
Donc par la question précédente appliquée en $x = 1$,

$$L(-1) = -\frac{1}{2}L(1) = -\frac{\pi^2}{12}$$

Partie III - Une autre propriété

10) Tout d'abord le rayon de convergence R de la série entière $\sum \frac{x^n}{n^2}$ vaut 1. En effet, multiplier par n ne modifie pas le rayon de convergence ce qui ramène à l'usuel $R = 1$ de la série géométrique.
On sait donc par le théorème de dérivation des séries entières que sa somme est $\mathscr{C}^\infty$ sur l'ouvert de convergence $]-1, 1[$.
Ensuite d'après la question 7) L est une fonction qui coïncide avec cette somme sur $[-1, 1]$, donc sur l'ouvert $]-1, 1[$.
On a donc sur $]-1, 1[$, $L'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$.
Il suffit alors de bien distinguer $x = 0$ qui donne $L'(0) = 1$, et pour $x \neq 0$ en sortant $\frac{1}{x}$ de la somme on a le développement usuel de $-\ln(1 - x)$.
Ainsi L est dérivable sur] - 1,1 [et on a :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad L'(x) = \begin{cases} -\frac{\ln(1-x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

11) On applique les théorèmes de dérivabilité.
   - — La fonction L est continue en -1^+ car elle coïncide sur $[-1, 1]$ avec la fonction $x \mapsto \sum \frac{x^n}{n^2}$ est cette dernière est continue puisque pour tout $n \geqslant 1$, $u_n : x \mapsto \frac{x^n}{n^2}$ est continue sur $[-1, 1]$ et que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement puisque que $\|u_n\|_{\infty,[-1,1]} = \frac{1}{n^2}$. De plus, d'après la question précédente, $\lim_{x\to -1^+} L'(x) = \ln(2)$.
     On en déduit que L est dérivable en -1 et $L'(-1) = \ln(2)$.
   - — La fonction L est continue en 1^- d'après la question 4). Cette fois $\lim_{x\to 1^-} L'(x) = +\infty$.
     On en déduit que L n'est pas dérivable en 1^-.

12) Sur $]0,1[$, h est dérivable par somme, produit et composées de fonctions dérivables.
Il suffit alors de dériver h et d'utiliser l'expression de L' de 10). pour obtenir $h'(x) = 0$.
Comme $]0,1[$ est un intervalle, ainsi la fonction h est constante sur $]0,1[$.

13) Notons C la valeur constante de h sur $]0,1[$.
Passons à la limite dans l'expression définissant h, quand $x \to 0^+$.
Nous utilisons ici que L est continue en 1 résultat obtenu en 4).
Donc quand $x \to 0^+$, $L(x) \to L(0)$, $L(1-x) \to L(1)$, et $\ln(x)\ln(1-x) \sim -x\ln(x) \to 0$.
Donc $h(x) \to L(1)$. Et par unicité de la limite $C = L(1)$.
On a bien que $h(x) = L(1)$ pour tout $x \in]0,1[$.

14) Par définition, pour $x = \frac{1}{2}$

$$L(1) = h\left(\frac{1}{2}\right) = 2L\left(\frac{1}{2}\right) + \ln(2)^2$$

qui donne, en utilisant la valeur de $L(1)$ trouvée ci-dessus,

$$L\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\ln(2)^2}{2}$$

Enfin par définition intégrale de L,

$$L\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - \frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t}{2e^t - 1}\,\mathrm{d}t$$

On en déduit que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{2\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = L\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\ln(2)^2}{2}$$