Dans cette partie, on considère une suite de variables aléatoires $(X_n : \Omega \longrightarrow \{-1, 1\})_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et à valeurs dans l'ensemble à deux éléments $\{-1, 1\}$, ces variables aléatoires étant mutuellement indépendantes et centrées.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire discrète $U_n = \frac{1+X_n}{2}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

Dans la suite, on fixe l'entier $n \geqslant 1$. On appelle chemin, tout $2n$-uplet $\gamma = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{2n})$ dont les composantes $\varepsilon_k$ valent $-1$ ou $1$ .

Si $\gamma = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{2n})$ est un chemin, on appelle indice d'égalité, tout entier $k \in [\![1, 2n]\!]$ tel que $\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i = 0$.

On note $N_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ la variable aléatoire qui à tout élément $\omega$ de l'univers $\Omega$ compte le nombre d'indices d'égalité du chemin $(X_1(\omega), \cdots, X_{2n}(\omega))$.
On note pour tout entier $i$ entre 1 et $n$, l'événement $A_i$ défini par

$$A_i = \{\omega,\ 2i \text{ est un indice d'égalité de } (X_1(\omega), \cdots, X_{2n}(\omega))\}$$

2. Calculer la probabilité $\mathbf{P}(A_i)$, pour tout entier $i$ entre 1 et $n$.
3. Soit $\ell \in \mathbb{Z}$ un entier et $n \geqslant 1$ un autre entier. En distinguant le cas où l'entier $\ell + n$ est pair ou impair, calculer $\mathbf{P}(S_n = \ell)$.
4. Montrer que la variable aléatoire $N_n$ admet une espérance finie et que son espérance $\mathbf{E}(N_n)$ est égale à :

$$\mathbf{E}(N_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\binom{2i}{i}}{4^i}$$

*Indication : on pourra exprimer la variable $N_n$ à l'aide de fonctions indicatrices associées aux événements $A_i$.*

5. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$$

6. En déduire l'équivalent :

$$\mathbf{E}(N_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n}$$