1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n(\Omega) = \{0, 1\}$ car $X_n(\Omega) = \{\pm 1\}$.
   De plus comme X_n est centrée,

$$0 = \mathbf{E}(X_n) = \mathbf{P}(X_n = 1) - \mathbf{P}(X_n = -1)$$

   On en déduit que

$$\mathbf{P}(U_n = 1) = \mathbf{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2} \text{ et } \mathbf{P}(U_n = 0) = \mathbf{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}$$

   On a bien $U_n \hookrightarrow \mathscr{B}(\frac{1}{2})$.
2. Soit i compris entre 1 et n. Considérons

$$T_{2i} = \sum_{k=1}^{2i} U_k = \frac{2i}{2} + \frac{1}{2} S_{2i} = i + \frac{1}{2} S_{2i}$$

   La variable T_{2i} suit la loi binomiale de paramètre $(2i, \frac{1}{2})$ car c'est une somme de $2i$ variables de Bernoulli indépendantes de paramètre $\frac{1}{2}$.
   On en déduit que

$$\mathbf{P}(A_i) = \mathbf{P}(S_{2i} = 0) = \mathbf{P}(T_{2i} = i) = \binom{2i}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{2i-i} = \binom{2i}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{2i}$$

3. Soient $\ell \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant que $X_i = 2U_i - 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k = 2 \left(\sum_{k=1}^{n} U_k \right) - n = 2T_n - n$$

   On en déduit que

$$\mathbf{P}(S_n = \ell) = \mathbf{P}(2T_n = n + \ell) = \mathbf{P}\left(T_n = \frac{n + \ell}{2}\right)$$

   — Si $n + \ell$ est impair. Comme $T_n(\Omega) \subset \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(S_n = \ell) = 0$.
   — Si $n + \ell$ est pair. On pose $n + \ell = 2p$ et

$$\mathbf{P}(S_n = \ell) = \mathbf{P}\left(T_n = p\right) = \binom{n}{p} \frac{1}{2}^n$$

4. Remarquons pour commencer que si k est impair, alors k ne peut pas être un indice d'égalité. On en déduit que $N_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i}$.
   Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(N_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(\mathbf{1}_{A_i}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\binom{2i}{i}}{4^i}$$

5. Utilisons une comparaison série-intégrale. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$.

$$\frac{1}{\sqrt{n}} + \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} = 1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \leqslant 1 + \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$$

Comme de plus

$$\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \left[2\sqrt{t}\right]_1^n = 2\sqrt{n} - 2$$

on obtient

$$2\sqrt{n} - 2 + \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \leqslant 2\sqrt{n} - 1$$

Le deux termes à droite et à gauche sont équivalents à $2\sqrt{n}$. Par encadrement,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$$

6. Utilisons la formule de Stirling

$$\frac{\binom{2i}{i}}{4^i} = \frac{(2i)!}{(i!)^2 4^i} \sim \frac{(2i)^{2i} e^{-2i} \sqrt{4\pi i}}{4^i i^{2i} e^{-2i} 2\pi i} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi i}}$$

La série $\sum_{i \geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{\pi i}}$ est une série à terme positif divergente (c'est une série de Riemann).
Par sommation des équivalents et en utilisant les questions 4 et 5,

$$\mathbf{E}(N_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\binom{2i}{i}}{4^i} \sim \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\pi i}} \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n}$$