Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. On considère $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.
On considère $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ défini par

$$q(x_0, \dots, x_{n-1}) = -x_0^2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2$$

On pose $\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$\beta : (x,y) \mapsto \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$$

On désire étudier les automorphismes de E qui préserve q. Précisément on pose

$$G = \{f \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}^n, q(f(x)) = q(x)\}$$

On pose $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que β est une forme bilinéaire symétrique. Est-ce un produit scalaire ?
2. Montrer que G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
3. Soit $f \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On note A sa matrice dans la base canonique. Montrer que $f \in G$ si et seulement si $A^\top J A = J$.
4. Que dire du déterminant des éléments de G ?
5. Soit $K = \{f \in G \mid f(e_0) = e_0\}$ ou e_0 est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
   a) Montrer que K est un sous-groupe de G.
   b) Soit $f \in K$. Montrer que $H = \mathrm{Vect}(e_0)^\perp$ est stable par f.
   c) En déduire que K isomorphe à $O_{n-1}(\mathbb{R})$.
6. On pose $\mathscr{H} = \{(t,X) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \mid q(t,X) = -1\}$.
   Par définition, $\mathscr{H}$ est stable par tous les éléments de G.
   a) Soit $(t,X) \in \mathscr{H}$. Soit $f \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On note $A = \left(\begin{array}{c|c} a & L \\ \hline C & B \end{array}\right)$ sa matrice dans la base canonique.
      Donner un système d'équations sur a, L, C, B équivalent aux relations $f(e_0) = (t,X)$ et $f \in G$ (en considérant X comme une matrice colonne de $\mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R})$).
   b) Expliciter une solution de ce système lorsque X est de la forme $X = r(1,0,\dots,0)^\top$ (avec $r \geqslant 0$).
   c) Pour $(t,X) \in \mathscr{H}$ quelconque, montrer qu'il existe $P_X \in O_{n-1}(\mathbb{R})$ tel que $X = P_X(\|X\|, 0, \dots, 0)^\top$.
      En déduire une solution dans G de l'équation $f(e_0) = (t,X)$.
   d) Montrer que pour tous $f, f' \in G$ on a : $f'(e_0) = f(e_0) \Leftrightarrow \exists k \in K,\ f' = f \circ k$
   e) Expliciter une bijection entre $\mathscr{H}$ et $\{-1,1\} \times \mathbb{R}^{n-1}$. En déduire (à l'aide de $X \mapsto P_X$) une bijection de $\{-1,1\} \times \mathbb{R}^{n-1} \times O_{n-1}(\mathbb{R})$ vers G.

Exercice 2

Dans toute ce problème on considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires discrètes **indépendantes** toutes de même loi, chacune suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.
On note, pour tout entier naturel n non nul et tout $\omega \in \Omega$,

$$I_n(\omega) = \min\big(X_1(\omega),\, X_2(\omega), \cdots, X_n(\omega)\big) \quad \text{et} \quad M_n(\omega) = \max\big(X_1(\omega),\, X_2(\omega), \cdots, X_n(\omega)\big)$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, l'application I_n est une variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.
   Il en est de même, et on l'admet, de l'application M_n.
2. Donner, pour tout naturel k, $P(X_1 > k)$.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, I_n suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.
4. Quelles sont les limites de $\mathbf{E}(I_n)$ et, pour tout entier naturel k non nul, de $\mathbf{P}(I_n = k)$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$?
5. a) Soit $\omega \in \Omega$. Justifier l'existence d'une limite finie, notée $\ell(\omega)$, pour la suite de terme général $I_n(\omega)$.
   b) Exprimer la partie $\mathscr{L} = \{\omega \in \Omega \;;\; \ell(\omega) = 1\}$ en fonction des événements $(I_n = 1)$ et en déduire que la partie $\mathscr{L}$ est un événement presque sûr.
6. Étude de l'espérance de M_n tend vers $+\infty$.
   a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Établir l'encadrement : $\frac{1}{p} \leqslant \mathbf{E}(M_n) \leqslant \frac{n}{p}$.
   b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer, pour tout entier naturel k, la valeur de $\mathbf{P}(M_n \leqslant k)$.
   c) Soit $K \in \mathbb{N}^*$. Établir, pour tout entier naturel n non nul :
   $$\mathbf{E}(M_n) \geqslant \mathbf{E}(M_n\, \mathbf{1}_{(M_n \leqslant K)}) + K\, \mathbf{P}(M_n > K)$$
   d) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}(M_n) = +\infty$.
7. Trois expressions de l'espérance de M_n.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) Montrer que $\mathbf{E}(M_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \big(1 - (1 - q^k)^n\big)$.
   b) Établir l'égalité : $\mathbf{E}(M_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{i-1} \frac{1}{1 - q^i}$.
   c) On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x. Établir l'égalité :
   $$\mathbf{E}(M_n) = \int_0^{+\infty} \big(1 - (1 - q^{\lfloor t \rfloor})^n\big)\, dt$$
8. Estimation de l'espérance de M_n.
   a) Justifier, pour tout entier naturel k, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} q^t\, (1-q^t)^k\, dt$ et déterminer sa valeur.
   b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - (1 - q^t)^n\big)\, dt = -\frac{H_n}{\ln q}$.
   c) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'encadrement :
   $$-\frac{H_n}{\ln q} \leqslant \mathbf{E}(M_n) \leqslant -\frac{H_n}{\ln q} + 1$$
   En déduire l'équivalence $\mathbf{E}(M_n) \sim -\frac{\ln n}{\ln q}$ quand l'entier n tend vers $+\infty$.