

Exercice 1

1. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\beta(y, x) = \beta(x, y)$ de manière immédiate.

Remarquons que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$\begin{aligned}\beta(x, y) &= \frac{1}{2}(-x_0 + y_0)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i + y_i)^2 + x_0^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + y_0^2 - \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 \\ &= -x_0 y_0 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i \\ &= \boxed{X^\top J Y}\end{aligned}$$

où $X = \text{mat}_{\text{can}}(x) = \begin{pmatrix} x_0 \\ \dots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ et *idem mut. mut.* pour Y .

Par bilinéarité du produit matriciel et linéarité de $x \mapsto \text{mat}_{\text{can}}(x)$, on en déduit la bilinéarité de β .

Cela montre que β est une forme bilinéaire symétrique.

Par contre, β n'est pas un produit scalaire. car pour $x = (1, 0, \dots, 0)$ on a $\beta(x, x) = q(x) = -1 < 0$.

Remarquons de plus que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a $q(x) = \beta(x, x) = X^\top J X$ car $\beta(x, x) = (4q(x) - q(x) - q(x))/2$.

2. G est non vide car il contient $\text{id}_{\mathbb{R}^n}$.

Soient $f, g \in G$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad q((f^{-1} \circ g)(x)) = q(f^{-1}(g(x))) = q(f(f^{-1}(g(x)))) = q(g(x)) = q(x)$$

donc $f^{-1} \circ g \in G$.

Ainsi G est un sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$.

3. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, notant $X = \text{mat}_{\text{can}}(x)$ et $Y = \text{mat}_{\text{can}}(y)$ on a :

$$\beta(x, y) = X^\top J Y \quad \text{et} \quad \beta(f(x), f(y)) = X^\top A^\top J A Y$$

Donc si $A^\top J A = J$ alors $f \in G$.

Réciproquement, si $f \in G$ alors pour tous x, y on a

$$\begin{aligned}\beta(f(x), f(y)) &= (q(f(x) + f(y)) - q(f(x)) - q(f(y)))/2 \\ &= (q(f(x + y)) - q(f(x)) - q(f(y)))/2 \\ &= (q(x + y) - q(x) - q(y))/2 \\ &= \beta(x, y)\end{aligned}$$

Pour $0 \leq i, j \leq n - 1$ on obtient pour $x = e_i$ et $y = e_j$, en posant $E_i = \text{mat}_{\text{can}}(e_i)$,

$$E_i^\top (A^\top J A - J) E_j = 0$$

c'est-à-dire $(A^\top J A - J)[i, j] = 0$

Ceci valant pour tous i, j on a $A^\top J A - J = 0$ c'est-à-dire $A^\top A J = J$.

4. Dans les notations précédentes, si $f \in G$ on a $\det(J) = \det(A^\top JA) = \det(A^\top) \det(J) \det(A) = \det(J) \det(A)^2$ et comme $\det J = -1 \neq 0$ on a

$$\det(A)^2 = 1$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\det(A) \in \{-1, 1\}}$$

5. Soit $K = \{f \in G \mid f(e_0) = e_0\}$ ou e_0 est le premier vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n .

- a) On voit que K n'est pas vide car il contient $\text{id}_{\mathbb{R}^n}$. De plus, pour tous $f, g \in K$ on a

$$e_0 = f^{-1}(f(e_0)) = f^{-1}(e_0) = f^{-1}(g(e_0))$$

donc $f^{-1} \circ g \in K$.

Ainsi $\boxed{K \text{ est un sous-groupe de } G}$.

- b) Remarquons que $H = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$.

Soit $f \in K$. La matrice A de f dans la base canonique est alors de la forme

$$A = \left(\begin{array}{c|c} 1 & L \\ \hline 0 & B \end{array} \right)$$

et comme

$$J = A^\top JA = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline L^\top & B^\top \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} -1 & -L \\ \hline 0 & B \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} -1 & -L \\ \hline -L^\top & -L^\top L + B^\top B \end{array} \right)$$

on en déduit que $L = 0$ puis $B^\top B = I_{n-1}$ c'est-à-dire $B \in O(n-1)$.

On a alors pour tout $x \in H$, notant $X = \text{mat}_{\text{can}}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ Y \end{pmatrix}$, $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ BY \end{pmatrix}$ donc $f(x) \in H$.

Donc $\boxed{H \text{ est stable par } f \text{ pour tout } f \in K}$.

- c) En remontant le raisonnement précédent on obtient que si réciproquement $B \in O(n-1)$ alors l'endomorphisme f canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ appartient à K .

On en déduit que $\boxed{K \text{ est isomorphe à } O_{n-1}(\mathbb{R})}$ via l'application φ qui à tout $B \in O(n-1)$ associe l'endomorphisme canoniquement associé à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$

car pour tous $B, B' \in O(n-1)$ on a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & BB' \end{pmatrix}$ donc $\varphi(BB') = (\varphi(B)) \circ (\varphi(B'))$.

6. On pose $\mathcal{H} = \{(t, X) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \mid q(t, X) = -1\}$.

Par définition, \mathcal{H} est stable par tous les éléments de G .

- a) Soit $(t, X) \in \mathcal{H}$. Soit $f \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. On note $A = \begin{pmatrix} a & L \\ C & B \end{pmatrix}$ sa matrice dans la base canonique.

On a $f(e_0) = (t, X) \Leftrightarrow \boxed{(a, C) = (t, X)}$. Supposant cette condition vérifiée on a

$$f \in G \Leftrightarrow A^\top JA = J \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} t & X^\top \\ L^\top & B^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & L \\ X & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -t^2 + X^\top X & -tL + X^\top B \\ -tL^\top + B^\top X & -L^\top L + B^\top B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} t^2 & = & 1 + \|X\|^2 \\ L & = & \frac{X^\top B}{t} \\ B^\top(-\frac{XX^\top}{t^2} + I_{n-1})B & = & I_{n-1} \end{cases}} \tag{4}$$

b) Supposons que $X = r(1, 0, \dots, 0)^\top$ avec $r \geq 0$. Le système précédent s'écrit alors

$$\begin{cases} t^2 = 1 + r^2 \\ L = r \text{ première ligne de } B \\ B^\top \begin{pmatrix} 1/t^2 & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} \end{cases}$$

et une solution est donnée par :

$$B = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}, \quad L = (t \ 0 \ \dots \ 0), \quad t = \sqrt{1 + r^2}$$

c) Soit $(t, X) \in \mathcal{H}$ (quelconque).

Si X n'est pas nulle, il suffit de compléter $(\frac{X}{\|X\|})$ (qui est orthonormale) en une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ et d'appeler P_X la matrice de passage de la base canonique à cette base.

Si X est nulle, toute matrice orthogonale convient.

Posons $r = \|X\|$.

D'après la question précédente, il existe une solution $f_0 \in G$ de l'équation $f_0(e_0) = (t, X_0)$, où

$$X_0 = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ car } \|X_0\| = \|X\| \text{ donc } (t, X_0) \in \mathcal{H}.$$

Notons $\begin{pmatrix} t & L_0 \\ X_0 & B_0 \end{pmatrix}$ la matrice de f_0 dans la base canonique.

Pour avoir

$$I_{n-1} = B^\top \left(-\frac{XX^\top}{t^2} + I_{n-1} \right) B = B^\top \left(-\frac{P_X X_0 X_0^\top P_X^\top}{t^2} + I_{n-1} \right) B$$

il suffit de poser $B = P_X B_0$ car $P_X^\top P_X = I_{n-1}$.

Ainsi l'endomorphisme canoniquement associé à

$$\begin{pmatrix} t & P_X L_0 \\ X & P_X B_0 \end{pmatrix}$$

est une solution dans G de l'équation $f(e_0) = (t, X)$.

d) Soient $f, f' \in G$.

On a : $f'(e_0) = f(e_0) \Leftrightarrow \exists k \in K, (f^{-1} \circ f')(e_0) = e_0 \Leftrightarrow f^{-1} \circ f' \in K$

e) L'application $\mathcal{H} \ni (t, X) \mapsto (\varepsilon(t), X)$ avec $\varepsilon(t) = \begin{cases} +1 & \text{si } t > 0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$ est une bijection entre \mathcal{H} et $\{-1, 1\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ de réciproque $(\pm 1, X) \mapsto (\pm \sqrt{1 + \|X\|^2}, X)$.

On en déduit que l'application

$$(\pm 1, X, Q) \mapsto \begin{pmatrix} t & P_X L_0 \\ X & P_X B_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & P_X L_0 Q \\ X & P_X B_0 Q \end{pmatrix}$$

avec $t = \pm \sqrt{1 + \|X\|^2}$, $L_0 = (\|X\|, 0, \dots, 0)$ et $B_0 = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$ est une bijection de $\{-1, 1\} \times \mathbb{R}^{n-1} \times O_{n-1}(\mathbb{R})$ vers G .

(en identifiant $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$)

Exercice 2

1. Par définition, $I_n(\omega) \in \mathbb{N}^*$. De plus pour $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$I_n(\omega) = k \iff (\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_i(\omega) \geq k) \text{ et } (\exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_i(\omega) = k)$$

On en déduit que

$$(I_n = k) = \left(\bigcap_{i=1}^n (X_i \geq k) \right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^n (X_i = k) \right)$$

Comme pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, X_i est une variable aléatoire, $(I_n = k)$ est une intersection (finie) d'éléments de \mathcal{A} . C'est donc un élément de \mathcal{A} .

On a bien montré que I_n est une variable aléatoire discrète.

2. Soit $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}(X_1 > k) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=k+1}^{\infty} (X_1 = i)\right) = \sum_{i=k+1}^{\infty} \mathbf{P}(X_1 = i) = \sum_{i=k+1}^{\infty} pq^{i-1} = p \frac{q^k}{1-q} = q^k$$

3. Soit k un entier naturel, on voit que $(I_n > k) = \bigcap_{i=1}^n (X_i > k)$.

En utilisant l'indépendance des variables X_i et la question précédente,

$$\mathbf{P}(I_n > k) \stackrel{\text{II}}{=} \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i > k) = \prod_{i=1}^n pq^{k-1} = (q^n)^{k-1}$$

On en déduit que pour $k \geq 1$,

$$\mathbf{P}(I_n = k) = \mathbf{P}(I_n > k-1) - \mathbf{P}(I_n > k) = (q^n)^{k-2} - (q^n)^{k-1} = (1 - q^n)(q^n)^{k-1}$$

On en déduit que I_n suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^n$.

4. D'après ce qui précède,

$$\mathbf{E}(I_n) = \frac{1}{1 - q^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Pour

$$\mathbf{P}(I_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 1 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

5. a) Soit $\omega \in \Omega$, la suite $(I_n(\omega))$ est une suite décroissante minorée. Elle converge.

b) La suite $(I_n(\omega))_{n \geq 1}$ est une suite décroissante d'entiers naturels. Elle est donc stationnaire. On en déduit que

$$\ell(\omega) = 1 \iff \exists n \in \mathbb{N}^*, I_n(\omega) = 1$$

Cela prouve que $\mathcal{L} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} (I_n = 1)$.

De plus, on voit que la suite $((I_n = 1))_{n \geq 1}$ est une suite croissante d'éléments donc

$$\mathbf{P}(\mathcal{L}) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} (I_n = 1)\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(I_n = 1) = 1$$

6. a) Par hypothèse, $X_1 \leq M_n \leq X_1 + \dots + X_n$. Par linéarité de l'espérance,

$$\frac{1}{p} = \mathbf{E}(X_1) \leq \mathbf{E}(M_n) \leq \mathbf{E}(X_1 + \dots + X_n) = \frac{n}{p}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout entier naturel k , $(M_n \leq k) = \bigcap_{i=1}^n (X_i \leq k)$.

Par indépendance des variables aléatoires X_i ,

$$\mathbf{P}(M_n \leq k) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i \leq k) = (1 - q^k)^n$$

c) Soit $K \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq 1$. On voit que $M_n \geq M_n \mathbf{1}_{(M_n \leq K)} + K \mathbf{1}_{(M_n > K)}$.

En effet pour $\omega \in \Omega$,

— Si $M_n(\omega) \leq K$, on a $M_n(\omega) \geq M_n(\omega) + 0$

— Si $M_n(\omega) > K$, on a $M_n(\omega) \geq 0 + K$

Par croissance et linéarité de l'espérance

$$\mathbf{E}(M_n) \geq \mathbf{E}(M_n \mathbf{1}_{(M_n \leq K)}) + K \mathbf{E}(\mathbf{1}_{(M_n > K)}) = \mathbf{E}(M_n \mathbf{1}_{(M_n \leq K)}) + K \mathbf{P}(M_n > K)$$

d) Soit $K \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}(M_n > K) = 1 - \mathbf{P}(M_n \leq K) = 1 - (1 - q^K)^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$$

Il existe donc $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour $n \geq N$, $\mathbf{P}(M_n > K) \geq \frac{1}{2}$ et donc, en utilisant ce qui précède $\mathbf{E}(M_n) \geq \frac{K}{2}$. Cela montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(M_n) = +\infty$.

7. a) Comme M_n est à valeurs dans \mathbb{N}^* , en utilisant 6.b)

$$\mathbf{E}(M_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(M_n > k) = \sum_{k=0}^{\infty} 1 - \mathbf{P}(M_n \leq k) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - (1 - q^k)^n)$$

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$,

$$1 - (1 - q^k)^n = 1 - \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i q^{ki} = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (-1)^{i-1} q^{ki}$$

Par linéarité,

$$\mathbf{E}(M_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \binom{n}{i} \sum_{k=0}^{\infty} q^{ki} = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (-1)^{i-1} \frac{1}{1 - q^i}$$

c) Notons f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f : t \mapsto 1 - (1 - q^{\lfloor t \rfloor})^n$. Par définition de la partie entière, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction f est continue sur $[k, k + 1[$. En effet elle est constante à $1 - (1 - q^k)^n$ sur cet intervalle.

La fonction f est donc continue par morceaux. Par la relation de Chasles,

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} (1 - (1 - q^k)^n) dt = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - (1 - q^k)^n) = \mathbf{E}(M_n)$$

8. a) Soit $k \in \mathbb{N}$. On pose $g_k : t \mapsto q^{\top} (1 - q^{\top})^k$. La fonction est continue sur $[0, +\infty[$. De plus $|g_k(t)| \leq q^{\top} = \exp(\ln(q)t)$. Comme $\ln(q) < 0$, la fonction $t \mapsto \exp(\ln(q)t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et donc g_k aussi.

De plus,

$$\int_0^{+\infty} q^{\top} (1 - q^{\top})^k dt = \left[-\frac{1}{(k+1) \ln q} (1 - q^{\top})^{k+1} \right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{(k+1) \ln q}$$

b) Soit $n \geq 1$. Pour tout $t \in [0, +\infty[$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^\top (1 - q^\top)^k = q^\top \frac{1 - (1 - q^\top)^n}{1 - (1 - q^\top)} = 1 - (1 - q^\top)^n$$

En intégrant,

$$\int_0^{+\infty} (1 - (1 - q^\top)^n) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{+\infty} q^\top (1 - q^\top)^k dt = - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1) \ln q} = - \frac{H_n}{\ln q}$$

c) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $t \geq \lfloor t \rfloor$ donc $1 - (1 - q^{\lfloor t \rfloor})^n \geq 1 - (1 - q^t)^n$. En intégrant

$$\mathbf{E}(M_n) = \int_0^{+\infty} 1 - (1 - q^{\lfloor t \rfloor})^n dt \geq \int_0^{+\infty} 1 - (1 - q^t)^n dt = - \frac{H_n}{\ln q}$$

D'autre part

$$\int_0^{+\infty} 1 - (1 - q^{\lfloor t \rfloor})^n dt = \int_0^1 1 dt + \int_1^{+\infty} 1 - (1 - q^{\lfloor t \rfloor})^n dt = 1 + \int_0^{+\infty} 1 - (1 - q^{\lfloor t+1 \rfloor})^n dt$$

En utilisant cette fois que $t \leq \lfloor t+1 \rfloor$ on obtient que $\mathbf{E}(M_n) \geq 1 - \frac{H_n}{\ln q}$.

On sait que

$$\ln(k) - \ln(k-1) = \ln\left(1 + \frac{1}{k-1}\right) \sim \frac{1}{k-1} \sim \frac{1}{k}$$

Comme la série $\sum \frac{1}{k}$ diverge et que $\frac{1}{k} \geq 0$, par sommation des équivalents pour les séries divergentes,

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \sim \sum_{k=2}^n \ln(k) - \ln(k-1) = \ln(n)$$

On en déduit que $\mathbf{E}(M_n) \sim -\frac{\ln n}{\ln q}$ quand l'entier n tend vers $+\infty$.