

Normes

Définition d'une norme sur un espace vectoriel.

Norme euclidienne sur un espace préhilbertien réel; extension au cas des espaces préhilbertien complexe

Norme 1 et norme ∞ : $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$ sur \mathbf{K}^n ; $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$ sur un espace de fonctions

Norme produit sur un produit d'espaces vectoriels normés

Distance

Définition d'une distance

Distance associée à une norme

Boules

Boules ouvertes, boules fermées, sphères

Les boules sont convexes

Normes équivalentes

Définition de normes équivalentes.

Exemple

Caractère borné

Partie / suite / fonction bornée. Une partie est bornée si et seulement si elle est inclus dans une boule.

Suites

Convergence. Unicité de la limite.

La suite (u_n) converge vers ℓ ssi $(\|u_n - \ell\|)$ tend vers 0.

Cas de la norme produit.

Invariance de la convergence en remplaçant la norme par une norme équivalente.

Toute suite convergente est bornée.

Limite d'une somme, compatibilité à la multiplication externe.

Compatibilité de la limite au produit dans le cas d'une algèbre \mathcal{A} muni d'une norme $\|\cdot\|$ tel qu'il existe une constante C vérifiant : $\forall x, y \in \mathcal{A}^2, \|x \times y\| \leq C\|x\| \cdot \|y\|$

Valeur d'adhérence d'une suite

Applications lipschitziennes

Définition d'une application lipschitzienne

Si (u_n) tend vers ℓ et que f est lipschitzienne, la suite $(f(u_n))$ tend vers $f(\ell)$

Si f est linéaire, elle est lipschitzienne si et seulement s'il existe k tel que $\forall x \in E, \|f(x)\| \leq k\|x\|$.

Normes subordonnées

On a admis qu'en dimension finie toutes les normes sont équivalentes et que toutes les applications linéaires étaient lipschitziennes.