Devoir libre 10

Soit l'intervalle $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On considère la fonction f définie sur I par

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \frac{\sin x + 1}{\cos x}$$

1) Exprimer les dérivées f', f'' et $f^{(3)}$ à l'aide des fonctions usuelles.
2) Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients réels telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}$$

On explicitera les polynômes P_0, P_1, P_2, P_3 et, pour tout entier naturel n, on exprimera P_{n+1} en fonction de P_n et P_n'.
3) Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$, le polynôme P_n est unitaire, de degré n et que ses coefficients sont des entiers naturels.
4) Montrer

$$\forall x \in I, \quad 2f'(x) = f(x)^2 + 1$$

Pour tout entier naturel n, on pose $\alpha_n = f^{(n)}(0) = P_n(0)$.

5) Montrer $2\alpha_1 = \alpha_0^2 + 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2\alpha_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k}$$

On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{\alpha_n}{n!} x^n$ et g sa somme.

6) À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n}{n!} x^n \leqslant f(x)$$

7) En déduire la minoration $R \geqslant \dfrac{\pi}{2}$.
8) Montrer : $\forall x \in I, \quad 2g'(x) = g(x)^2 + 1$.
9) Montrer : $\forall x \in I, \quad f(x) = g(x)$. *Considérer les fonctions* $\arctan \circ f$ *et* $\arctan \circ g$.
10) En déduire que $R = \pi/2$.
11) Justifier que toute fonction $h : I \to \mathbb{R}$ s'écrit de façon unique sous la forme $h = p + i$ avec $p : I \to \mathbb{R}$ une fonction paire et $i : I \to \mathbb{R}$ une fonction impaire.
12) En déduire

$$\forall x \in I, \quad \tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} \text{ et } \frac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n}}{(2n)!} x^{2n}$$

On note t la fonction définie sur I par $t(x) = \tan(x)$.

13) Pour tout entier naturel n, exprimer $t^{(n)}(0)$ en fonction des réels $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$.
14) Rappeler, sans justification, l'expression de t' en fonction de t.
15) En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_{2n+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k-1} \alpha_{2k-1} \alpha_{2n-2k+1}.$$