# Inégalités de Hölder et Minkowski



Dans tout le sujet, $p$ désigne un réel strictement supérieur à 1.

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p} \tag{$M_p$}$$

où $(a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n)$ sont des réels positifs. Cela s'appelle *l'inégalité de Minkowski.*

1. Avant de montrer l'inégalité de Minkowski, on veut montrer l'inégalité de Hölder.
   On considère $q \in ]1,+\infty[$ tel que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ et $(a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n)$ des réels positifs :
   $$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q} \tag{$H_p$}$$
   a) Reconnaitre une inégalité classique dans le cas où $p=2$.
   b) Justifier que $x \mapsto x^p$ (définie sur $\mathbb{R}_+$) est convexe
   c) Soit $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(\beta_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ des réels positifs où les $\beta_i$ ne sont pas tous nuls. Montrer que
   $$\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i\alpha_i\right)^p \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i\alpha_i^p\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i\right)^{p-1}.$$
   d) En déduire que
   $$\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i\alpha_i\right) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i\alpha_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i\right)^{1/q}.$$
   e) Montrer l'inégalité de Hölder en choisissant bien les valeurs pour $\alpha_i$ et $\beta_i$.
2. Déduisons-en l'inégalité de Minkowski
   a) Justifier que
   $$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p = \sum_{i=1}^{n} a_i(a_i+b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} b_i(a_i+b_i)^{p-1}$$
   b) En utilisant l'inégalité de Hölder, montrer l'inégalité de Minkowski
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $u=(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{K}^n$ on note
   $$\|u\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$
   Montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme $\mathbb{K}^n$.