Dans tout le sujet, p désigne un réel strictement supérieur à 1.
Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des réels positifs

1. a) Dans le cas où $p = 2$, on reconnait l'inégalité de Cauchy-Schwarz relative au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

   b) La fonction $x \mapsto x^p$ (définie sur $\mathbb{R}_+$) est convexe car elle est dérivable et sa dérivée $x \mapsto px^{p-1}$ est croissante (car $p - 1 \geqslant 0$).

   c) Soit $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(\beta_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ des réels positifs où les β_i ne sont pas tous nuls.
   Par convexité de $x \mapsto x^p$ sur $\mathbb{R}^+$ et par l'inégalité de Jensen, posant $B = \sum_{i=1}^n \beta_i$ on a :
$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{B}\alpha_i\right)^p \leqslant \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{B}\alpha_i^p$$
   car les β_i/B sont positifs et leur somme est 1.
   Ainsi
$$\left(\sum_{i=1}^n \beta_i\alpha_i\right)^p \leqslant \left(\sum_{i=1}^n \beta_i\alpha_i^p\right)\left(\sum_{i=1}^n \beta_i\right)^{p-1}.$$

   d) Par croissance de la fonction $x \mapsto x^{1/p}$ sur $\mathbb{R}^+$ il vient :
$$\left(\sum_{i=1}^n \beta_i\alpha_i\right) \leqslant \left(\sum_{i=1}^n \beta_i\alpha_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n \beta_i\right)^{1/q}.$$
   car $\frac{p-1}{p} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$.

   e) Posons pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,
$$\beta_i = b_i^q$$
$$\alpha_i = \begin{cases} \frac{a_ib_i}{\beta_i} = a_ib_i^{1-q} & \text{si } b_i \neq 0 \\ 0 & \text{si } b_i = 0 \end{cases}$$
   Ainsi pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:
$$\begin{array}{rcl} \alpha_i\beta_i & = & a_ib_i \\ \beta_i\alpha_i^p & = & \begin{cases} b_i^{q+p-pq}a_i^p = a_i^p & \text{si } b_i \neq 0 \\ 0 & \text{si } b_i = 0 \end{cases} \end{array}$$
   Par la question précédente, on a, si les b_i ne sont pas tous nuls :
$$\sum_{i=1}^n a_ib_i \leqslant \left(\sum_{i\in[\![1,n]\!] \ t.q. \ b_i\neq 0} a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n b_i\right)^{1/q} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n b_i\right)^{1/q}$$
   Cela reste vrai si tous les b_i sont nuls car $0 \leqslant 0$.

2. a) De manière immédiate
$$\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^p = \sum_{i=1}^n (a_i+b_i)(a_i+b_i)^{p-1} = \sum_{i=1}^n a_i(a_i+b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^n b_i(a_i+b_i)^{p-1}$$

b) Par l'inégalité de Hölder,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(a_i+b_i)^{p-1} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^{pq-q}\right)^{1/q} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^{p}\right)^{1/q}$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(a_i+b_i)^{p-1} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^{p}\right)^{1/q}$$

D'où par la question précédente

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^{p} \leqslant \left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p}\right) \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^{p}\right)^{1/q}$$

Si $a_1, \ldots, b_n$ ne sont pas tous nuls il vient :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^{p}\right)^{1-\frac{1}{q}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p}$$

ce qui est l'inégalité de Minkowski car $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$.
Le cas où les a_i et b_i sont tous nuls est immédiat.

3. L'inégalité de Minkowski est l'inégalité triangulaire pour $||.||_p$.
Les autres vérifications : positivité, séparation, homogénéité sont immédiates et laissées au lecteur.
Donc $\| \cdot \|_p$ est une norme $\mathbb{K}^n$.