1 Généralités

Définition (Équations différentielles linéaires)

Soit n un entier non nul et I un intervalle.

1. *Un équation différentielle linéaire d'ordre n est une équation de la forme :*

$$\alpha_n(t)y^{(n)} + \cdots + \alpha_1(t)y' + \alpha_0(t)y = \beta(t), \tag{E}$$

*où les $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ et β sont des fonctions **continues** sur I.*

   - *Les fonctions $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ s'appellent les coefficients de l'équation différentielle.*
   - *La fonction β s'appelle le second membre.*
   - *L'équation différentielle est dite homogène si β est la fonction nulle.*

2. *La forme résolue d'une équation différentielle linéaire d'ordre n est*

$$y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y + b(t).$$

Remarques :

1. On associe à une équation

$$\alpha_n(t)y^{(n)} + \cdots + \alpha_1(t)y' + \alpha_0(t)y = \beta(t), \tag{E}$$

son *équation homogène associée.* C'est l'équation différentielle qui a les mêmes coefficients mais dont le second membre est nul

$$\alpha_n(t)y^{(n)} + \cdots + \alpha_1(t)y' + \alpha_0(t)y = 0 \tag{H}$$

2. On considère une équation différentielle linéaire

$$\alpha_n(t)y^{(n)} + \cdots + \alpha_1(t)y' + \alpha_0(t)y = \beta(t) \tag{E}$$

Si la fonction α_n ne s'annule pas sur l'intervalle I on peut lui associer une équation différentielle sous forme résolue

$$y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y + b(t)$$

en posant pour tout $i \in [\![0 ; n-1]\!]$, $a_i : t \mapsto -\dfrac{\alpha_i(t)}{\alpha_n(t)}$ et $b : t \mapsto \dfrac{\beta(t)}{\alpha_n(t)}$.

Définition (Solutions d'une équation différentielle linéaire)

Soit n un entier non nul et I un intervalle. On considère l'équation différentielle linéaire

$$\alpha_n(t)y^{(n)} + \cdots + \alpha_1(t)y' + \alpha_0(t)y = \beta(t), \tag{E}$$

*où les $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ et β sont des fonctions **continues** sur I.*
On appelle solution de l'équation (E) toute fonction $y \in \mathscr{C}^n(I, \mathbf{K})$ telle que

$$\forall t \in I, \quad \alpha_n(t)y^{(n)}(t) + \cdots + \alpha_1(t)y'(t) + \alpha_0(t)y(t) = \beta(t)$$

Remarque : On considère une équation différentielle linéaire

$$\alpha_n(t)y^{(n)} + \cdots + \alpha_1(t)y' + \alpha_0(t)y = \beta(t), \tag{E}$$

On peut regarder la fonction

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathscr{C}^n(I,\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^0(I,\mathbf{K}) \\ & y & \longmapsto & \sum_{k=0}^{n} \alpha_k y^{(k)} \end{array}$$

Avec ces notations, on voit que $y \in \mathscr{C}^n(I,\mathbf{K})$ vérifie (E) si et seulement si $\Phi(y) = b$.

Théorème (Structure de l'ensemble des solutions)

Soit (E) une équation différentielle linéaire d'ordre n définie sur un intervalle I et (H) l'équation homogène associée.

1. L'ensemble $\mathscr{S}_H$ des solutions de (H) est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^n(I,\mathbf{K})$.
2. S'il existe une solution f_0 de (E) on a $\mathscr{S}_E = \{f + f_0 \mid f \in \mathscr{S}_H\}$.
   On dit alors que $\mathscr{S}_E$ est un espace affine de direction $\mathscr{S}_H$. C'est-à-dire

$$f \in \mathscr{S}_E \iff (f - f_0) \in \mathscr{S}_H.$$

2 Équations linéaires du premier ordre

Théorème (Equation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène)

Soit I un intervalle et $a : I \to \mathbf{C}$ une fonction continue sur I. Les solutions de l'équation différentielle linéaire du premier ordre résolue

$$y' + a(t)y = 0$$

sont les fonctions f définies sur I par :

$$\forall x \in I, \quad f(t) = \lambda.e^{-A(t)},$$

où $\lambda \in \mathbf{C}$ et $x \mapsto A(t)$ est une primitive de a sur I.

Note (Plan de résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1)

Voici alors la méthode à appliquer pour résoudre l'équation (E).

$$y' + a(t)y = b(t) \tag{E}$$

1. On exprime l'équation homogène associée (H).
2. On résout (H).
3. On trouve une solution particulière de (E)
4. On exprime la forme générale des solutions.

Proposition (Variation de la constante)

Les solutions de l'équation différentielle linéaire résolue du premier ordre sur I

$$y' + a(t)y = b(t)$$

où a et b sont des fonctions continues sur I sont de la forme

$$t \mapsto \left(\int^t b(u)e^{A(u)}\,\mathrm{d}u\right)e^{-A(t)} + Ke^{-A(t)}.$$

(On peut supprimer la constante si on fait varier la borne « en bas » de l'intégrale)

Exemple : On veut résoudre

$$y' + y = \cos(t) \tag{E}$$

L'équation homogène associée est

$$y' + y = 0 \tag{H}$$

Les solutions de l'équation homogène sont

$$\mathscr{S}_H = \{t \mapsto \lambda e^{-t} \mid \lambda \in \mathbf{R}\}.$$

On va chercher la solution particulière sous la forme :

$$f : t \mapsto \lambda(t)e^{-t} \text{ où } \lambda : \mathbf{R} \to \mathbf{R},$$

est une fonction dérivable.
Dés lors on a

$$\begin{aligned} f \text{ vérifie (E)} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbf{R},\ f'(t) + f(t) = \cos t \\ &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbf{R},\ \lambda'(t)e^{-t} - \lambda(t)e^{-t} + \lambda(t)e^{-t} = \cos t \\ &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbf{R},\ \lambda'(t)e^{-t} = \cos t \\ &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbf{R},\ \lambda'(t) = e^t \cos t \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'a trouver une primitive de $e^t \cos t$. Pour cela on remarque que

$$\forall x \in \mathbf{R},\ e^t \cos t = \Re\left(e^{(1+i)t}\right).$$

On en déduit qu'une primitive de $e^t \cos t$ est donnée par

$$\Re\left(\frac{e^{(1+i)t}}{1+i}\right) = \Re\left(\frac{(1-i)e^t(\cos t + i\sin t)}{2}\right) = \frac{1}{2}e^t(\cos t + \sin t).$$

On en déduit que la fonction $t \mapsto \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)$ est une solution particulière et que

$$\mathscr{S}_E = \left\{t \mapsto \frac{1}{2}(\cos t + \sin t) + \lambda e^{-t} \mid \lambda \in \mathbf{R}\right\}.$$

3 Équations linéaires du deuxième ordre

On va résoudre l'équation différentielle

$$ay'' + by' + cy = f(t) \tag{E}$$

où a, b et c sont des **constantes** complexes avec $a \neq 0$ et f une fonction définie sur un intervalle I.
L'équation homogène associée est alors

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{H}$$

Définition

On appelle équation caractéristique de (H) l'équation du second degré :

$$aX^2 + bX + c = 0$$

Théorème (Cas complexe)

Avec les notations précédentes, on note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation caractéristique. On a alors

- Si $\Delta \neq 0$: on note α_1 et α_2 les deux racines de l'équation caractéristique. On a

$$\mathscr{S}_H = \{t \mapsto \lambda e^{\alpha_1 t} + \mu e^{\alpha_2 t} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2\}.$$

- Si $\Delta = 0$: on note α la racine double de l'équation caractéristique. On a

$$\mathscr{S}_H = \{t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{\alpha t} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2\}.$$

En particulier, c'est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension 2.

Théorème (Cas réel)

Avec les notations précédentes, suppose que a, b et c sont des réels. On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation caractéristique. On a alors

- Si $\Delta > 0$: on note α_1 et α_2 le deux racines réelles de l'équation caractéristique. On a

$$\mathscr{S}_H = \{t \mapsto \lambda e^{\alpha_1 t} + \mu e^{\alpha_2 t} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2\}.$$

- Si $\Delta = 0$: on note α la racine double réelle de l'équation caractéristique. On a

$$\mathscr{S}_H = \{t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{\alpha t} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2\}.$$

- Si $\Delta < 0$: on note $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ le deux racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique. On a

$$\mathscr{S}_H = \{t \mapsto e^{\alpha t}(\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2\}.$$

Là encore l'ensemble des solutions est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

Théorème

Soit
$$ay'' + by' + cy = Ae^{\lambda t} \tag{E}$$
où A et λ sont des constantes complexes.
Il existe une solution particulière de (E) de la forme $t \mapsto Bt^{\alpha}e^{\lambda t}$ où

— $\alpha = 0$ si λ n'est pas une racine de l'équation caractéristique,

— $\alpha = 1$ si λ est une racine simple de l'équation caractéristique,

— $\alpha = 2$ si λ est une racine double de l'équation caractéristique.

Exemple : On considère l'équation
$$y'' - 4y' + 3y = e^t \cos(2t) \tag{E}$$
On a $e^t \cos(2t) = \Re(e^{(1+2i)t})$. On regarde alors
$$y'' - 4y' + 3y = e^{(1+2i)t} \tag{E'}$$
L'équation caractéristique est $X^2 - 4X + 3 = (X-1)(X-3)$. On a $(1+2i)$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique. On cherche une solution sous la forme $x \mapsto Be^{(1+2i)t}$. On trouve que $B \in \mathbf{C}$ vérifie :
$$B((1+2i)^2 - 4(1+2i) + 3) = 1$$
D'où
$$B = -\frac{1}{4(1+i)} = -\frac{1-i}{8}.$$
On en déduit que (E') admet pour solution particulière $t \mapsto -\dfrac{1-i}{8}e^t(\cos(2t)+i\sin(2t))$. En prenant la partie réelle, on obtient que :
$$t \mapsto -\frac{1}{8}(\cos(2t) + 2\sin(2t))e^t$$
est une solution particulière de (E).
$$\mathscr{S} = \{t \mapsto -\frac{1}{8}(\cos(2t) + 2\sin(2t))e^t + \lambda e^t + \mu e^{3t} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2\}.$$