

Semaine 10 - du 2 au 6 décembre

Réduction des endomorphismes et normes

Polynômes de matrices et d'endomorphismes

Définition de $P(u)$ et $P(A)$ pour $P \in \mathbf{K}[X]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Morphismes d'algèbres $\Phi_u : P \mapsto P(u)$ et $\Phi_A : P \mapsto P(A)$.

Polynômes annulateurs

Idéal des polynômes annulateurs d'une endomorphisme, d'une matrice.

Polynôme minimal

Si $P(A) = 0$ et $\lambda \in \text{Sp}(A)$ alors $P(\lambda) = 0$.

Théorème de Cayley-Hamilton : $\chi_A(A) = 0$.

Lemme de décomposition des noyaux

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il est annulé par un polynôme scindé à racines simples si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.

Polynôme annulateur d'un endomorphisme induit ; diagonalisabilité d'un endomorphisme induit

Endomorphisme annulé par un polynôme scindé

Sous-espaces caractéristiques

S'il existe un polynôme scindé annulant u , décomposition de E en somme directe des sous-espaces caractéristiques. Ils sont stables par u et, sur chacun, u induit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent

Traduction matricielle

Normes

Définition d'une norme sur un espace vectoriel.

Norme euclidienne sur un espace préhilbertien réel ; extension au cas des espaces préhilbertien complexe

Norme 1 et norme ∞ : $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$ sur \mathbf{K}^n ; $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$ sur un espace de fonctions

Norme produit sur un produit d'espaces vectoriels normés

Distance

Définition d'une distance

Distance associée à une norme

Boules

Boules ouvertes, boules fermées, sphères

Les boules sont convexes

Il faut commencer par interroger sur l'algèbre linéaire. Si le temps le permet on peut passer à un exercice sur les normes.