Soit X un ensemble fini, voici quelques méthodes qui permettent de dénombrer les éléments d'un ensemble fini c'est-à-dire de calculer son cardinal qui sera noté $|X|$.

1. Dénombrement d'un ensemble

Pour dénombrer un ensemble, la plupart du temps, il faut organiser les éléments de cet ensemble. Pour cela, on peut se poser la question : comment faire pour écrire la liste de tous les éléments de l'ensemble X ? Ou, mieux encore, comment faire pour écrire programme en Python ou en Caml devant écrire cette liste ?

1. Si l'ensemble X contient plusieurs sous-ensembles d'éléments aux comportements bien distincts, vous serez amené à dénombrer séparément les cardinaux de ces sous-ensembles. ⇝ Voir la méthode **Disjoindre des cas**
2. Sinon, pour mettre de l'ordre dans les éléments de X, vous serez amené à les classer suivant certaines de leurs caractéristiques : la couleur, la forme, le nombre de pattes... ⇝ Voir la méthode **Raisonner par choix successifs**
3. Si l'ensemble X est déjà d'un type très simple, le dénombrement peut résulter immédiatement du cours de première année. ⇝ Voir la méthode **Dénombrer un ensemble de listes**
4. Dans certaines situations, l'ensemble X est une partie d'un ensemble plus grand X_0, et il est plus facile de dénombrer l'ensemble X_0 et le complémentaire de X dans X_0. ⇝ Voir la méthode **Passer au complémentaire**
5. (†) Dans certaines situations, on va compter les éléments de l'ensemble mais chaque élément va être compté plusieurs fois (par contre, chaque élément est compté le même nombre de fois) ⇝ Voir la méthode **Utiliser un quotient**

→ Disjoindre des cas

Pour organiser votre ensemble X, vous le découpez en paquets bien distincts, qui seront dénombrés chacun à son tour. *A priori*, ces paquets sont de tailles différentes (sinon on utilise plutôt la méthode des choix successifs). Le cardinal de X apparaîtra finalement comme une **somme**.

S'il y a un petit nombre de cas à considérer (deux ou trois), on les séparera **clairement**. La rédaction type est la suivante :

Pour choisir un élément x de X, on distingue plusieurs cas.

- *Cas 1 : l'élément x est du type 1. [On raisonne dans ce cas particulier.] Il y a donc n_1 choix possibles.*
- *Cas 2 : l'élément x est du type 2. [On raisonne dans ce cas particulier.] Il y a donc n_2 choix possibles.*

Il y a au total $N = n_1 + n_2$ choix possibles. Les cas considérés étant disjoints, il y a donc N éléments dans l'ensemble X.

S'il y a un grand nombre de cas à considérer, on explicitera la partition $X = X_1 \sqcup \dots \sqcup X_k$, en définissant les sous-ensembles $X_1, \dots, X_k$, et en vérifiant qu'ils sont disjoints. En général, le dénombrement se fait alors de la même manière pour tous les X_i, même si le cardinal obtenu dépend de i. On utilisera une rédaction comme :

Pour choisir un élément x de X, on choisit d'abord l'entier i tel que $x \in X_i$.

1. *[On raisonne dans le cas i.] Il y a donc n_i choix possibles.*

En réunissant les X_i, il y a au total $N = n_1 + \dots + n_k$ choix possibles. Les cas considérés étant disjoints, il y a donc N éléments dans l'ensemble X.

Reste la situation, plus rare, où l'ensemble X se décompose naturellement en sous-ensembles qui ne sont pas disjoints. S'il y deux sous-ensembles, cela reste raisonnable ; s'il y en a plus, cela complique nettement le dénombrement. Dans ce cas, demandez-vous d'abord s'il ne serait pas plus avantageux de passer au complémentaire, ou, à défaut, si vous pouvez envisager un raisonnement par récurrence. En désespoir de cause, il vous restera la formule du crible (mais elle est hors programme)...

Exemple : Soit E un ensemble fini à n éléments. On note $X = \{(A, B) \in \mathscr{P}(E)\ ,\ A \subset B\}$. On cherche $|X|$. On peut commencer par découper en fonction de l'ensemble B. Plus précisément, pour pour $B_0 \in \mathscr{P}(E)$, on peut poser

$$X_{B_0} = \{(A, B) \in \mathscr{P}(E)\ ,\ A \subset B \text{ et } B = B_0\}$$

On voit alors $X = \bigsqcup_{B \in \mathscr{P}(E)} X_B$. On est donc ramené à calculer, à B fixé, $|X_B|$.

En fixant B dans $\mathscr{P}(E)$, se donner un élément de X_B revient à se donner une partie de B. Cela montre que X_B est en bijection avec $\mathscr{P}(B)$ et donc que $|X_B| = 2^{|B|}$. On en déduit que

$$|X| = \sum_{B \in \mathscr{P}(E)} 2^{|B|} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^p = (1+2)^n = 3^n$$

La deuxième égalité venant du fait que l'on sait (voir plus bas) que pour tout $p \in [\![0 ; p]\!]$, il y a $\binom{n}{p}$ parties de E ayant p éléments.

→ Raisonner par choix successifs

Pour organiser votre ensemble X, vous le divisez en plusieurs paquets (tous de même taille), eux-mêmes divisés en sous-paquets (tous de même taille), *et cetera* jusqu'à arriver à des sous-paquets consitués d'un seul élément. Le cardinal de X apparaîtra finalement comme un **produit**. La rédaction type est la suivante :

> *Pour choisir un élément de X, il faut se donner*
>
> 1. *la caractéristique 1 dans l'ensemble ..., soit n_1 choix possibles ;*
> 2. *...*
> 3. *la caractéristique k dans l'ensemble ..., soit n_k choix possibles.*
>
> *Il y a au total $N = n_1 n_2 ... n_k$ choix possibles. Au termes de ces choix, chaque élément de X apparaît une et une seule fois, il y a donc N éléments dans l'ensemble X.*

Une bonne représentation de cette méthode est un arbre de dénombrement, dans lequel chaque noeud obtenu au terme de l'étape $i-1$ donne naissance à n_i nouvelles branches à l'étape i.

Exemple : On veut dénombrer le nombre d'anagrammes du mot RENNES. Pour se donner un tel anagramme il faut :

1. Se donner la position des E. Il faut donc choisir 2 positions parmi 6 soit $\binom{6}{2} = 15$ possibilités
2. Se donner la position des N. Il faut donc choisir 2 positions parmi 4 (puisqu'il y a déjà deux positions d'occupées) soit $\binom{4}{2} = 6$ possibilités
3. Se donner la position du R. Il faut choisir 1 position parmi 2. Il y a 2 possibilités.
4. Le S se place automatiquement à la dernière place.

On en déduit qu'il y a $15 \times 6 \times 2 = 180$ anagrammes du mot RENNES.

Notons que l'on a trouvé $\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \frac{6!}{4!2!}.\frac{4!}{2!2!}.\frac{2!}{1!1!} = \frac{6!}{2!2!}$. Cela peut aussi s'obtenir par la méthode **Utiliser un quotient**.

→ Dénombrer un ensemble de listes

Il existe trois types d'ensembles de listes à savoir dénombrer. De préférence, on commencera par expliciter l'ensemble E dans lequel leurs éléments seront choisis, en lui donnant un nom et en précisant son cardinal.

1. les listes **ordonnées**, **avec répétition** possible, de p éléments choisis dans un ensemble E de cardinal n.
   Il y en a : n^p.
   Ces listes sont aussi appelées p-uplets, ou applications de $[\![1 \,;\, p]\!]$ dans E.
2. les listes **ordonnées**, **sans répétition**, de p éléments choisis dans un ensemble E de cardinal n.
   Il y en a : $n(n-1)...(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.
   Ces listes sont aussi appelées p-arrangements, ou applications injectives de $[\![1 \,;\, p]\!]$ dans E.
3. les listes **non ordonnées**, **sans répétition**, de p éléments choisis dans un ensemble E de cardinal n.
   Il y en a $\begin{pmatrix}n\\p\end{pmatrix} = \dfrac{n(n-1)...(n-p+1)}{p(p-1)...1}$.
   Ces listes sont aussi appelées p-combinaison, ou parties de E de cardinal p. À noter que, dans une lecture stricte du programme, le mot «liste», sans précision, devrait être réservé aux listes ordonnées.
4. les listes non ordonnées, avec répétition possible, de p éléments choisis dans un ensemble E de cardinal n (hors programme) : on peut montrer qu'il y en a $\begin{pmatrix}n+p-1\\p\end{pmatrix}$.
   Ces listes sont aussi appelées multi-ensembles ; elles ne sont pas à connaître, mais sont bien pratiques, par exemple, pour étudier les systèmes de racines des polynômes.

L'ensemble X ne sera peut-être pas directement un ensemble de liste, mais il pourra «s'y ramener». En général, il ne sera pas nécessaire d'expliciter une bijection entre X et l'un des ensembles de listes ci-dessus. On se contentera d'une rédaction du style :

> *Choisir un élément de X revient à choisir une liste ordonnée/non ordonnée, avec/sans répétition, de p éléments pris dans l'ensemble E, de cardinal n. Il y a donc ... choix possibles.*

Exemple : Au quinté, il y a 20 chevaux. On s'intéresse au 5 premiers. Si on veut le nombre de quinté dans l'ordre, on cherche une liste ordonnée sans répétitions. Il y a donc $\dfrac{20!}{(20-5)!} = 1860480$ possibilités. Si on veut connaitre le nombre de quinté sans s'occuper de l'ordre il y en a $\begin{pmatrix}20\\15\end{pmatrix} = \dfrac{20!}{15!5!} = 15504$.

→ Passer au complémentaire

Si l'ensemble X est contenu dans un ensemble X_0, on définira **clairement** l'ensemble X_0, ainsi que le complémentaire $X_0 \setminus X$. Après avoir dénombré ces deux ensembles, le cardinal de X s'en déduira par soustraction.

Noter que, dans le cadre d'un problème de probabilités, il est généralement plus simple de soustraire des probabilités que des cardinaux.

Exemple : On utilise un jeu de 52 cartes. Une « main » est la donnée de 5 cartes (toutes les cartes sont différentes et on ne les ordonne pas). On note A l'ensemble des mains. On sait que $|A| = \binom{52}{5} = 2598960$.

On note X l'ensemble des mains avec au moins un ♣. Le plus simple est alors de voir que $A \setminus X$ est l'ensemble des mains sans aucun ♣. Comme il y a $52 - 13 = 39$ cartes qui ne sont pas des ♣, on obtient

$$|X| = |A| - |A \setminus X| = \binom{52}{5} - \binom{39}{5} = 2023203$$

→ Utiliser un quotient (†)

On dénombre les éléments de l'ensemble X mais, la méthode simple pour dénombre ses éléments amène à les compter plusieurs fois (si possible tous le même nombre de fois). D'un point de vue théorique, on suppose qu'il existe une application $f : Y \to X$ surjective telle que pour tout x, x' dans X, $|f^{-1}(\{x\})| = |f^{-1}(\{x'\})|$. On a

$$|Y| = \sum_{x \in X} |f^{-1}(\{x\})| = \alpha \times |X|$$

si on note α le cardinal commun à tous les ensembles $f^{-1}(\{x\})$.

Exemple : On veut dénombrer les anagrammes de RENNES. On sait dénombrer les permutations d'un ensembles. On suppose donc que les deux R et les E sont distincts. On étudie les permutations de $\text{RENN}\widetilde{\text{N}}\widetilde{\text{E}}\text{S}$. Ce sont 6 lettres distinctes, il y en a donc $6! = 720$. Ce pendant tout anagrammes de RENNES va apparaitre 4 fois dans la liste des permutations de $\text{RENN}\widetilde{\text{N}}\widetilde{\text{E}}\text{S}$ car il y a deux possibilités de positions pour les E et deux pour les N. Par exemple l'anagramme ENRENS va apparaitre sous la forme :

$$\widetilde{\text{E}}\widetilde{\text{N}}\text{RENS - E}\widetilde{\text{N}}\text{R}\widetilde{\text{E}}\text{NS - }\widetilde{\text{E}}\text{NRE}\widetilde{\text{N}}\text{S - ENR}\widetilde{\text{E}}\widetilde{\text{N}}\text{S}$$

Il y a donc 180 anagrammes.

De manière générale, si on cherches les anagrammes d'un mot ayant N lettres mais ne contenant que p lettres deux à deux distinctes. Si on note $k_1, \ldots k_p$ le nombre d'occurrence de chaque lettre (de sorte que $k_1 + \cdots + k_p = N$). Le nombre d'anagrammes (ou permutations avec répétitions) est

$$\frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_p!}$$

Application probabilités finies

On parle ici de probabilités finies dès lors que les évènements et variables aléatoires considérés sont en nombre fini, les variables aléatoires présentant un nombre fini de valeur possibles. Comme vous l'avez vu en première année, ce type de situation peut se modéliser à l'aide d'un univers fini. Ce n'est toutefois pas obligatoire, et très souvent l'univers sous-jacent n'a pas grande importance, sauf si on souhaite le munir de la probabilité uniforme.

Utiliser des issues équiprobables

Dans certaines situations, on étudie une expérience aléatoire dont l'issue peut être décrite comme un «tirage», tous les tirages étant équiprobables. En dehors des cas où l'équiprobabilité est explicitée dans l'énoncé, vous pourrez considérer l'équiprobabilité comme implicite dans les trois cas classiques de tirage dans une «urne» contenant N «objets» :

1. n tirages successifs avec remise : les tirages équiprobables sont alors les listes ordonnées, avec répétition possible, de n éléments pris dans l'ensemble E des objets.
   Les expériences de lancers de pièces ou dés équilibrés peuvent être assimilées à ce cas.
2. n tirages successifs sans remise : les tirages équiprobables sont alors les listes ordonnées, sans répétition, de n éléments pris dans l'ensemble E des objets.
   L'expérience qui consiste à permuter aléatoirement N objets peut être assimilée à ce cas, avec $n = N$.
3. n tirages simultanés : les tirages équiprobables sont alors les listes non ordonnées, sans répétition, de n éléments pris dans l'ensemble E des objets.
   L'expérience consistant à cocher au hasard n cases dans une liste de N cases peut y être assimilée.

Attention! Ne vous laissez pas piéger par des mots comme «identiques», «indiscernables». Ces expressions sont valables uniquement du point de vue de l'expérimentateur; elles servent à indiquer que tous les objets ont la même probabilité d'être tirés (d'où l'équiprobabilité). Du point de vue du probabiliste, les N objets présents dans l'urne sont bien distincts. On pourra toujours supposer qu'ils sont numérotés, fût-ce de manière «invisible» pour l'expérimentateur, par exemple au moyen de puces électroniques. L'ensemble E des objets est donc nécessairement de cardinal N, sans quoi l'équiprobabilité est perdue.

De même, si l'énoncé indique qu'on lance «simultanément» n dés «identiques» à N faces, c'est seulement pour indiquer que, du point de vue de l'expérimentateur, l'ordre des chiffres n'importe pas. Du point de vue du probabiliste, ces dés sont bien distincts. On pourra, là aussi, supposer qu'ils sont numérotés. Un tirage sera donc une liste ordonnée, avec répétition possible, de n chiffres entre 1 et N.

Une rédaction possible pour les situations d'équiprobabilité est la suivante.

Un tirage est une liste ordonnée/non ordonnée, avec/sans répétition, de n objets pris parmi les N présents dans l'urne. Notons Ω l'ensemble des tirages possibles. Alors $|\Omega| = k_\Omega$.

Les tirages sont équiprobables, ce qui permet de munir l'univers Ω de la probabilité uniforme.

Considérons maintenant l'évènement $A = [\ldots]$.

Choisir un tirage dans l'évènement A revient à [dénombrement de l'ensemble des tirages favorables]. Il y a donc k_A choix possibles, c'est-à-dire que $|A| = k_A$.

L'univers Ω étant muni de la probabilité uniforme, on obtient $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{k_A}{k_\Omega} = \ldots$

Exemple : On tire une poignée de 5 cartes dans un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir un brelan ?

On rappelle qu'un brelan consiste en 3 cartes de la même hauteur et deux autres cartes qui ne sont pas de la hauteur des 3 précédentes. Les deux dernières cartes ne devant pas être les même sinon on a un full.

Un tirage est une liste sans répétition et sans ordre de 5 cartes parmi 52. Notons Ω l'ensemble des mains possible :

$$|\Omega| = \binom{52}{5} = 2598960$$

Dénombrons pour commencer le nombre de brelans sans se soucier du fait qu'ils puissent être des fulls. Notons X_1 l'ensemble des mains contenant un brelan. On raisonne par choix successifs. Pour se donner une telle main il faut se donner

1. La hauteur du brelan (brelan de 7, brelan de rois,...) : il y a 13 choix possibles
2. Les trois cartes qui constituent le brelan. Il faut donc choisir 3 cartes parmi les 4 de la hauteur choisie : il y a $\binom{4}{3} = 4$ choix possibles
3. Les deux dernières cartes qui doivent être prises dans les 48 cartes qui ne sont pas de la hauteur des cartes du brelan. Il y a $\binom{48}{2} = 1128$ choix possibles.

On trouve donc $|X_1| = 13 \times 4 \times 1128 = 58656$.

Si on veut cette fois ne pas compter les fulls, il faut enlever les paires lors du choix de l'étape 3. En procédant comme ci-dessus, il y a $\binom{12}{1} \times \binom{2}{4} = 72$ choix possibles pour les paires (on choisit la hauteur puis les 2 cartes parmi 4). Par la méthode du complémentaire, il n'y a plus que 1056 possibilités.

Si on note donc X_2 l'ensemble des « vrais » brelans, on obtient $|X_2| = 13 \times 4 \times 1056 = 54912$.

Finalement la probabilité d'avoir un brelan est $P(X_2) = \dfrac{|X_2|}{|\Omega|} = 0,0211$.

Deux remarques pour finir sur cet exemple

— Quand on calcul des probabilités, il peut y avoir plusieurs choix d'univers Ω. Par exemple, il est possible de considérer que les cartes sont ordonnées. Dans ce cas $|\Omega| = 52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48 = 311875200$. Il faut alors adapter le calcul de $|X_2|$ en conséquence.

— Si vous voulez vous entrainer sur le cas du poker. Vous trouverez sur la page wikipédia les probabilités des différentes mains.