Proposition

Soit X et Y deux variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$ et $f : X(\Omega) \to E$, $g : Y(\Omega) \to F$. Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$.

Démonstration : Soit $x \in E$ et $y \in F$, on sait que

$$\big(f(X) = x\big) = \bigcup_{\substack{u \in X(\Omega) \\ f(u) = x}} (X = u) \qquad \text{et} \qquad \big(g(Y) = y\big) = \bigcup_{\substack{v \in Y(\Omega) \\ g(v) = y}} (Y = v)$$

De ce fait, par distributivité de $\cap$ sur $\cup$

$$\big(f(X) = x\big) \cap \big(g(Y) = y\big) = \bigcup_{\substack{(u,v) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ f(u) = x, g(v) = y}} (X = u) \cap (Y = v)$$

Les événements dans cette union étant deux à deux disjoints et les variables X et Y étant supposées indépendantes, on obtient que

$$\mathbf{P}\Big(\big(f(X) = x\big) \cap \big(g(Y) = y\big)\Big) = \sum_{\substack{(u,v) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ f(u) = x, g(v) = y}} \mathbf{P}(X = u) \times \mathbf{P}(Y = v)$$

Or, en procédant de même,

$$\mathbf{P}\big(f(X) = x\big) = \sum_{\substack{u \in X(\Omega) \\ f(u) = x}} \mathbf{P}(X = u) \qquad \text{et} \qquad \mathbf{P}\big(g(Y) = y\big) = \sum_{\substack{v \in Y(\Omega) \\ g(v) = y}} \mathbf{P}(Y = v)$$

Le théorème de sommation par paquets permet alors de conclure :

$$\mathbf{P}\Big(\big(f(X) = x\big) \cap \big(g(Y) = y\big)\Big) = \mathbf{P}\big(f(X) = x\big) \times \mathbf{P}\big(g(Y) = y\big)$$

Les variables $f(X)$ et $g(Y)$ sont bien indépendantes.

$\square$

Théorème (Lemme des coalitions)

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ des variables aléatoires discrètes indépendantes. Soit $k \in [\![1 ; n-1]\!]$ et

$$f : \prod_{i=1}^{k} X_i(\Omega) \longrightarrow E \; ; \; g : \prod_{i=k+1}^{n} X_i(\Omega) \longrightarrow F$$

Les variables $f(X_1, \ldots, X_k)$ et $g(X_{k+1}, \ldots, X_n)$ sont des variables aléatoires discrètes indépendantes.

Démonstration :

L'idée est de montrer que $Y = (X_1, \ldots, X_k)$ et $Z = (X_{k+1}, \ldots, X_n)$ sont des vecteurs aléatoires indépendants, d'utiliser le résultat précédent.

Soit $(x_1, \ldots, x_k) \in \prod_{i=1}^{k} X_i(\Omega)$ et $(x_{k+1}, \ldots, x_n) \in \prod_{i=k+1}^{n} X_i(\Omega)$,

$$\big(Y = (x_1, \ldots, x_k)\big) = \bigcap_{i=1}^{k} (X_i = x_i) \text{ et } \big(Z = (x_{k+1}, \ldots, x_n)\big) = \bigcap_{i=k+1}^{n} (X_i = x_i).$$

On en déduit, d'après l'indépendance des variables X_i que

$$\mathbf{P}\Big(\big(Y = (x_1, \ldots, x_k)\big) \cap \big(Z = (x_{k+1}, \ldots, x_n)\big)\Big) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i = x_i)$$

De même

$$\mathbf{P}\big(Y = (x_1, \ldots, x_k)\big) \times \mathbf{P}\big(Z = (x_{k+1}, \ldots, x_n)\big) = \prod_{i=1}^{k} \mathbf{P}(X_i = x_i) \times \prod_{i=k+1}^{n} \mathbf{P}(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i = x_i).$$

On a bien montré que Y et Z étaient indépendantes. Il suffit alors d'utiliser le résultat précédent.

□