Théorème (Sommation par paquets - cas réels positifs)

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs indexée par I. Soit $(I_j)_{j\in J}$ une partition de I. Dans $[0,+\infty]$,

$$\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) = \sum_{i\in I} u_i$$

En particulier, $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement toutes les familles $(u_i)_{i\in I_j}$ sont sommables et que la famille $\left(\sum\limits_{i\in I_j} u_i\right)_{j\in J}$ est sommable.

Démonstration : Ce théorème est admis. On va démontrer cette égalité par double inégalité.

— $\boxed{\geqslant}$ Soit $K \subset I$ un ensemble fini. Pour tout $j \in J$, on note $K_j = K \cap I_j$ et on considère T l'ensemble des indices j tels que $K_j \neq \emptyset$. L'ensemble T est une partie finie de J car K est un ensemble fini. On a alors

$$\sum_{i\in K} u_i = \sum_{j\in T}\left(\sum_{i\in K_j} u_i\right) \leqslant \sum_{j\in T}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) \leqslant \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)$$

où la première inégalité est obtenue en utilisant que pout tout $j \in J$, $\sum\limits_{i\in K_j} u_i \leqslant \sum\limits_{i\in I_j} u_i$ et la croissance de la somme.
Cela montre que

$$\sum_{i\in I} u_i \leqslant \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)$$

— $\boxed{\leqslant}$ Commençons par remarquer que s'il existe $j \in J$ tel que $\sum\limits_{i\in I_j} u_i = +\infty$ alors l'inégalité est vraie car les deux termes valent $+\infty$.
On suppose donc que pour tout $j \in J$, $\sum\limits_{i\in I_j} u_i < +\infty$.

Soit T une partie finie de J, on veut majorer $\sum\limits_{j\in T}\left(\sum\limits_{i\in I_j} u_i\right)$. Le problème est que $\bigcup_{j\in T} I_j$ n'est peut-être pas fini. On va devoir approcher les termes $\sum_{i\in I_j} u_i$ par des sommes sur des ensembles finis.
On fixe $\varepsilon > 0$ et on note $N = \#T$. Par définition de la borne supérieure, pour tout $j \in T$, il existe une partie finie K_j de I_j telle que

$$\sum_{i\in I_j} u_i - \frac{\varepsilon}{N} \leqslant \sum_{i\in K_j} u_i \leqslant \sum_{i\in I_j} u_i$$

En faisant la somme sur tous les éléments de T et en notant $K = \bigcup\limits_{j\in T} K_j$,

$$\sum_{j\in T}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) - \varepsilon \leqslant \sum_{j\in T}\left(\sum_{i\in K_j} u_i\right) = \sum_{i\in K} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i$$

L'inégalité de droite venant du fait que K est un ensemble fini.
Cette inégalité étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on a donc

$$\sum_{j\in T}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) \leqslant \sum_{i\in I} u_i$$

Cela implique que

$$\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) \leqslant \sum_{i\in I} u_i$$

□

Théorème (Sommation par paquets - cas complexe)

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes indexée sur un ensemble I. Soit $(I_j)_{j\in J}$ une partition de I.

1. La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si
   - Pour tout $j \in J$, la famille $(u_i)_{i\in I_j}$ est sommable.
   - La famille $\left(\sum_{i\in I_j} |u_i|\right)_{j\in J}$ est sommable.
2. Dans ce cas,

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)$$

Démonstration :

1. Commençons par la partie sur la sommabilité. D'après le théorème de sommation par paquets pour les réels positifs, dans $[0, +\infty]$,

$$\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} |u_i|\right) = \sum_{i\in I} |u_i|$$

   Comme la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si la famille $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable, on obtient le résultat voulu.

2. On suppose maintenant que la famille $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable. On va montrer en utilisant le théorème d'approximation, que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\left|\sum_{i\in I} u_i - \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)\right| \leqslant 2\varepsilon$$

   On fixe $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $T \subset I$ un ensemble fini tel que pour tout T' contenant T,

$$\left|\sum_{i\in I} u_i - \sum_{i\in T'} u_i\right| \leqslant \varepsilon$$

   De plus, par inégalité triangulaire, pour tout $j \in J$, $\left|\sum_{i\in I_j} u_i\right| \leqslant \sum_{i\in I_j} |u_i|$ ce qui montre que la famille $\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)_{j\in J}$ est sommable. Il existe donc $G \subset J$ un ensemble fini tel que pour tout G' contenant G, $\left|\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) - \sum_{j\in G}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)\right| \leqslant \varepsilon$

Quitte à ajouter à G tous les éléments $j \in J$ tels que $T \cap I_j \neq \emptyset$, on peut supposer que $T \subset \bigcup_{j\in G} I_j$ (mais G reste un ensemble fini). On pose alors $K = \bigcup_{j\in G} I_j$ et, puisque c'est une somme finie,

$$\sum_{j\in G}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) = \sum_{i\in K} u_i$$

Donc

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i\in I} u_i - \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)\right| &\leqslant \left|\sum_{i\in I} u_i - \sum_{i\in K} u_i + \sum_{i\in K} u_i - \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)\right| \\
&\leqslant \left|\sum_{i\in I} u_i - \sum_{i\in K} u_i\right| + \left|\sum_{j\in G}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) - \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)\right| \\
&\leqslant 2\varepsilon
\end{aligned}$$

□