Exercice I

Soit $n \geqslant 1$, on pose pour $k \in [\![0, n]\!]$, $P_k = X^k$.
À tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on associe le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = XP(X) - \frac{1}{n}\left(X^2 - 1\right)P'(X)$$

On note T l'application qui à P associe Q.

1) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Déterminer $T(P_k)$.
2) Montrer que T est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
3) Écrire la matrice M de T dans la base $\mathscr{B} = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
4) On suppose que λ est une valeur propre réelle de l'endomorphisme T et soit P un polynôme unitaire, vecteur propre associé à la valeur propre λ.
   a) Montrer que P est de degré n.
   b) Soit z_0 une racine complexe de P. Prouver que $z_0^2 - 1 = 0$.
      On pourra commencer par le cas où z_0 est racine simple.
5) Déterminer les valeurs et sous-espaces propres de l'endomorphisme T. Est-il diagonalisable ?

Exercice II

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$.

1) On définit la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ par $f_0 = f$ et $\forall n \geqslant 0$, $f_{n+1} : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f_n(t)dt$.
   a) Justifier que l'on définit bien ainsi une suite de fonctions.
   b) Montrer que pour tout entier n et tout $x \in [0, 1]$, $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{x^n \|f\|_\infty}{n!}$.
   c) En déduire que la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers une fonction à préciser.
2) On définit une autre suite de fonctions par $g_0 = f$ et $\forall n \geqslant 0$, $g_{n+1} : x \mapsto 1 + \displaystyle\int_0^x g_n(t)dt$.
   a) On suppose dans cette question que la suite (g_n) converge uniformément sur $[0, 1]$. Déterminer sa fonction limite.
   b) Étudier la convergence uniforme sur $[0, 1]$ de la suite (g_n).
      On pourra considérer $g_n - g$ où g est la fonction déterminée à la question précédente.

Problème

Notations

- La partie I permet d'obtenir des résultats, certains seront utilisés dans le problème.
- La partie II étudie quelques exemples de calcul de produit infini, dont celui de Wallis.
- La partie III permet de montrer, sous certaines conditions, la continuité ou le caractère $\mathscr{C}^1$ d'une fonction définie par un produit infini de fonctions.

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n \geqslant p}$ une suite de nombres réels. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant p$,

$$P_n = \prod_{k=p}^{n} u_k.$$

On dit que la suite $(P_n)_{n \geqslant p}$ est la suite des produits partiels du produit infini $\prod\limits_{n \geqslant p} u_n$.

Si la suite $(P_n)_{n \geqslant p}$ converge, on dit que sa limite est la valeur du produit infini et on pose :

$$\prod_{k=p}^{+\infty} u_k = \lim_{n \to +\infty} P_n$$

I - Résultats préliminaires

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$

1) Montrer que, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left| \left(\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \right) - 1 \right| \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} (1 + |x_k|) \right) - 1.$$

On pourra introduire les réels $p_I = \prod\limits_{k \in I} x_k$ *pour* $I \subset [\![1, n]\!]$.

2) Montrer que, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in [-1, +\infty[^n$,

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \leqslant \exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right).$$

3) Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $u_n = \left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n$.
Le but de cette question est de montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers e^z.
   a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{C}$, $|(1 + t) - \mathrm{e}^t| \leqslant |t|^2 \mathrm{e}^{|t|}$.
   On pourra commencer par écrire e^t *sous la forme d'une série.*
   b) Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. On note $M = \max\{|a|, |b|\}$.
   Montrer que $|a^n - b^n| \leqslant n M^{n-1} |a - b|$.
   c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\left| \left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n - \mathrm{e}^z \right| \leqslant \dfrac{|z|^2}{n} \mathrm{e}^{|z|}$.
   d) Conclure que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ converge vers e^z.

II - Exemples de calcul de produit infini

4) Calculer $\displaystyle\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ et $\displaystyle\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$.

On pourra, pour tout $N \geqslant 2$, établir une expression de $\displaystyle\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ *et* $\displaystyle\prod_{n=2}^{2N}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^n \, du.$$

5) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

6) Déterminer un équivalent de la suite $(W_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{4n^2-1}\right)$.

III - Étude d'une fonction définie par un produit infini

On considère dans cette partie :

— deux réels a et b tels que $a < b$ et le segment $\mathcal{S} = [a, b]$

— une suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ de fonctions définies sur $\mathcal{S}$ à valeurs dans $]-1, +\infty[$

— pour tous $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \mathcal{S}$:

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(1+f_k(x)), \quad Q_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(1+|f_k(x)|), \text{ et sous condition d'existence } R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty}|f_k(x)|.$$

On suppose dans cette partie que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de fonctions continues sur $\mathcal{S}$ et que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1}|f_n]$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$ vers la fonction R_0.

7) Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{S}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$|P_{n+1}(x) - P_n(x)| \leqslant Q_{n+1}(x) - Q_n(x).$$

8) Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que, pour tous $x \in \mathcal{S}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$Q_{n+1}(x) - Q_n(x) \leqslant \mathrm{e}^M |f_{n+1}(x)|.$$

9) a) Déduire de ce qui précède que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1}(P_{n+1} - P_n)$ converge simplement puis uniformément sur $\mathcal{S}$.

b) En déduire que la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$.

On note P la fonction définie sur $\mathcal{S}$ par :

$$P : x \mapsto \prod_{n=1}^{+\infty}(1+f_n(x)) = \lim_{n\to+\infty} P_n(x)$$

10) a) Montrer que la fonction P est continue.

b) Montrer de plus que P ne s'annule pas sur $\mathcal{S}$.

On pourra considérer $\ln(P_n(x))$ *pour* $n \geqslant 1$ *et* $x \in \mathcal{S}$.

11) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on pose $f(x) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - e^{-nx^2}\right)$.

a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^\star$.

b) Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}_+^\star$.

c) Calculer la limite de f en 0.

d) Calculer la limite de f en $+\infty$.

On pourra au choix utiliser les questions 1 et 2 ou la question 9.b).

On suppose dans la suite que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathcal{S}$ telle que :

— la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} |f_n|$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$.

— la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \frac{f_n'}{1+f_n}$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$.

12) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \mathcal{S}$,

$$P_n'(x) = P_n(x) \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k'(x)}{1+f_k(x)}.$$

13) En déduire que la fonction

$$P : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \prod_{n=1}^{+\infty} (1 + f_n(x)) \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathcal{S}$ et que

$$\forall x \in \mathcal{S},\ \frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n'(x)}{1+f_n(x)}$$