Exercice I

1) Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

$$T(P_k) = X^{k+1} - \frac{k}{n}(X^2-1)X^{k-1} = \left(1 - \frac{k}{n}\right) X^{k+1} + \frac{k}{n}X^{k-1}$$

2) L'application T est linéaire par linéarité de la dérivation et bilinéarité du produit matriciel. De plus, d'après la question précédente, si $k < n$ alors $\deg(T(P_k)) = k+1 \leqslant n$ et, pour $k = n$, $T(P_n) = X^{n-1}$ donc $\deg(T(P_n)) = n-1 \leqslant n$. Cela montre que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $T(P_k) \in \mathbb{R}_n[X]$. Par linéarité, T est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$. C'est donc un endomorphisme.

3) D'après la première question

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{n} & \ddots & & \vdots \\ 0 & \frac{n-1}{n} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{n} & 0 \end{pmatrix}$$

4) a) Par hypothèse $T(P) = \lambda P$. Supposons par l'absurde que $d = \deg(P) < n$. On note alors $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ où $a_d = 1$. Comme pour tout $k < d$, $T(P_k)$ est de degré $k+1 \leqslant d$ et que $T(P_d) = d+1$, $\deg(T(P)) = d+1$ ce qui est absurde car $\deg(\lambda P)$ est égal à d ou à $-\infty$ si $\lambda = 0$.

Cela montre que $\deg(P) = n$.

b) Soit z_0 une racine complexe de P.

— Si on suppose que z_0 est racine simple alors $P(z_0) = 0$ et $P'(z_0) \neq 0$. Par hypothèse, $XP(X) - \frac{1}{n}(X^2-1)P'(X) = \lambda X$. En évaluant en z_0 on obtient $-\frac{1}{n}(z_0^2-1)P'(z_0) = 0$ et donc $z_0^2 - 1 = 0$ car $P'(z_0) \neq 0$.

— Dans le cas général, on suppose que z_0 est racine d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$. On pose $P = (X-z_0)^r Q$ où $Q(z_0) \neq 0$. La relation $T(P) = \lambda P$ devient alors

$$X(X-z_0)^r Q(X) - \frac{1}{n}(X^2-1)[r(X-z_0)^{r-1}Q(X) + (X-z_0)^r Q(X)] = \lambda(X-z_0)^r Q(X)$$

On sait que $\mathbb{C}[X]$ est un anneau intègre donc, en factorisant par $(X-z_0)^{r-1}$,

$$X(X-z_0)Q(X) - \frac{1}{n}(X^2-1)[rQ(X) + (X-z_0)Q(X)] = \lambda(X-z_0)Q(X)$$

En évaluant en z_0 et en utilisant que $Q(z_0) \neq 0$, on obtient que $z_0^2 - 1 = 0$.

5) D'après la question 4, les polynômes unitaires P qui sont des vecteurs propres de T sont de degré n et ils n'ont pas de racines complexes différentes de ± 1. On en déduit que nécessairement de la forme $Q_k = (X-1)^k(X+1)^{n-k}$.

Réciproquement,

$$\begin{aligned}
T(Q_k) &= XQ_k - \frac{1}{n}(X^2-1)[k(X-1)^{k-1}(X+1)^{n-k} + (n-k)(X-1)^k(X+1)^{n-k-1}] \\
&= \left[X - \frac{k}{n}(X+1) - \frac{n-k}{n}(X-1)\right] Q_k \\
&= \left(1 - \frac{2k}{n}\right) Q_k
\end{aligned}$$

Cela montre que T a $n+1$ valeurs propres : $\mathrm{Sp}(T) = \left\{1 - \frac{2k}{n} \ ; \ k \in [\![0, n]\!]\right\}$. De plus, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, l'espace propre associé à la valeur propre $1 - \frac{2k}{n}$ est $\mathrm{Vect}(Q_k)$.
En particulier, l'endomorphisme T est diagonalisable.

Exercice II

1) a) Par récurrence immédiate et par le théorème fondamental de l'analyse, $\boxed{f_n \text{ est définie et de classe } \mathscr{C}^n \text{ (donc continue) pour tout } n \in \mathbb{N}}$.

b) On procède par récurrence sur n.
initialisation : Pour tout $x \in [0, 1]$, $|f_0(x)| = |f(x)| \leqslant \|f\|_\infty = \frac{x^0\|f\|_\infty}{0!}$.
hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \in [0, 1]$ $|f_n(x)| \leqslant \frac{x^n\|f\|_\infty}{n!}$.
Alors pour tout $x \in [0, 1]$,

$$|f_{n+1}(x)| \leqslant \int_0^x |f_n(t)|dt \leqslant \int_0^x \frac{t^n\|f\|_\infty}{n!}dt = \frac{x^{n+1}\|f\|_\infty}{(n+1)!}$$

c) Par la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leqslant \|f_n\|_\infty \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{n!}$.
Par limite par encadrement, $\|f_n\|_\infty \underset{n\to\infty}{\to} 0$.
Donc la suite $\boxed{(f_n) \text{ converge uniformément vers la fonction nulle.}}$

2) a) On supose que la suite (g_n) converge uniformément sur $[0, 1]$ vers une fonction g.
Par convergence uniforme et par le théorème de primitivation, $(x \mapsto \int_0^x g_n(t)dt)$ convege uniformément donc simplement vers $G : x \mapsto \int_0^x g(t)dt$ qui est la primitive nulle en 0 de G.
De plus (g_{n+1}) converge uniformément donc simplement vers g.
Donc G vérifie l'équation différentielle $y' = 1 + y$.
$x \mapsto -1$ est solution particulière de cette équation, et la solution générale de l'équation homogène associée est $x \mapsto \lambda e^x, \ \lambda \in \mathbb{R}$.
Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in [0, 1] \ G(x) = -1 + \lambda e^x$$

Comme G est nulle en 0, $\lambda = 1$.
Donc $\boxed{\text{pour tout } x \in [0, 1],\ g(x) = G'(x) = e^x}$.

b) Posons $\boxed{f_n = g_n - g}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $g : x \mapsto e^x$.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1]$,

$$f_{n+1}(x) + g(x) = 1 + \int_0^x (f_n(t) + g(t))dt - g(t) = \int_0^x f_n(t)dt + 1 + \int_0^x g(t)dt$$

d'où

$$\boxed{f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)dt}$$

car $1 + \int_0^x e^t dt = 1 + e^x - 1 = e^x$.
Par la question 1), (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle.
Donc $\boxed{(g_n) = (f_n + g) \text{ converge uniformément vers } g : x \mapsto e^x}$.

Problème

I - Résultats préliminaires

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$

1) Par multi-linéarité, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1 + x_k) = \sum_{I \in \mathscr{P}([\![1,n]\!])} p_I$.
Donc $\displaystyle\left(\prod_{k=1}^{n}(1 + x_k)\right) - 1 = \sum_{I \in \mathscr{P}([\![1,n]\!])\setminus\emptyset} p_I$. Comme pour tout $I \subset [\![1, n]\!]$, $|p_I| = \prod_{k \in I} |x_k|$,

$$\left|\left(\prod_{k=1}^{n}(1 + x_k)\right) - 1\right| = \left|\sum_{I \in \mathscr{P}([\![1,n]\!])\setminus\emptyset} p_I\right| \leqslant \sum_{I \in \mathscr{P}([\![1,n]\!])\setminus\emptyset} |p_I| = \left(\prod_{k=1}^{n}(1 + |x_k|)\right) - 1$$

2) On voit que s'il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_k = -1$ alors l'inégalité est vraie car le terme de gauche est nul et que exp est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
Supposons que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_k > -1$. Par croissance de la fonction logarithme il suffit alors de montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(1 + x_k) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}(1 + x_k)\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} x_k$$

Ce dernier résultat est vrai puisque que ln est concave (sa dérivée seconde $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ est négative). On en déduit que sa courbe est « en dessous » de sa tangente à l'origine ; c'est-à-dire que pour tout $u > -1$, $\ln(1 + u) \leqslant u$.

3) Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$u_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

Le but de cette question est de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers e^z.

a) Soit $t \in \mathbb{C}$, par définition $e^t = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$. On en déduit que

$$|(1 + t) - e^t| = \left|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\right| \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|t|^k}{k!} = |t|^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k}{(k+2)!} \leqslant |t|^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k}{k!} = |t|^2 e^{|t|}$$

b) Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. On note $M = \max\{|a|, |b|\}$.
On voit que

$$|a^n - b^n| = |a - b| \times \left|\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\right| \leqslant |a - b| \times \sum_{k=0}^{n-1} |a|^k |b|^{n-1-k} \leqslant |a - b| \times \sum_{k=0}^{n-1} M^{n-1}$$

Donc $|a^n - b^n| \leqslant nM^{n-1}|a - b|$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. En utilisant la question précédente

$$\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - e^z\right| = \left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - \left(\mathrm{e}^{z/n}\right)^n\right| \leqslant n\left|1+\frac{z}{n} - e^{z/n}\right| M^{n-1}$$

où $M = \max\left\{\left|1+\dfrac{z}{n}\right|, \left|e^{z/n}\right|\right\}$. En utilisant a) on voit que

$$n\left|1+\frac{z}{n} - e^{z/n}\right| \leqslant n\left|\frac{z}{n}\right|^2 e^{|z/n|} = \frac{|z|^2}{n}e^{|z|/n}$$

Par ailleurs, on a

$$e^{z/n} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z/n)^k}{k!} \text{ et } e^{|z|/n} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(|z|/n)^k}{k!}$$

On en déduit que

$$\left|1+\frac{z}{n}\right| \leqslant 1+\frac{|z|}{n} \leqslant e^{|z|/n} \text{ et } |e^{z/n}| \leqslant e^{|z|/n}$$

Finalement, $M \leqslant e^{|z|/n}$ et donc

$$\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - \mathrm{e}^z\right| \leqslant \frac{|z|^2}{n}e^{|z|/n} \times (e^{|z|/n})^{n-1} = \frac{|z|^2}{n}e^{|z|}$$

d) Comme $\dfrac{|z|^2}{n}e^{|z|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, la suite (u_n) tend vers e^z.

II - Exemples de calcul de produit infini

4) Soit $N \geqslant 2$,

$$\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \prod_{n=2}^{N}\frac{(n-1)(n+1)}{n\times n} = \prod_{n=2}^{N}\frac{n-1}{n} \times \prod_{n=2}^{N}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{N}\times\frac{N+1}{2}$$

On en déduit en faisant tendre $N \to +\infty$ que $\displaystyle\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$.

De même, en séparant les termes d'indices pairs et les termes d'indices impairs,

$$\prod_{n=2}^{2N}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = \prod_{p=1}^{N}\left(1-\frac{1}{2p}\right) \times \prod_{p=1}^{N-1}\left(1+\frac{1}{2p+1}\right) = \prod_{p=1}^{N}\frac{2p-1}{2p} \times \prod_{p=1}^{N-1}\frac{2p+2}{2p+1}$$

On en déduit que

$$\prod_{n=2}^{2N}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = \prod_{p=1}^{N}\frac{2p-1}{2p} \times \prod_{p=2}^{N}\frac{2p}{2p-1} = \frac{1}{2}$$

Finalement $\displaystyle\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = \frac{1}{2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^n \, du.$$

5) On reconnait les intégrales de Wallis. On fait une intégration par parties

$$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u \times (\cos u)^{n+1} du = \left[\sin(u) \times (\cos u)^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^2 (\cos u)^n du$$

Le crochet est nul et on sait que $(\sin u)^2 = 1 - (\cos u)^2$ donc $W_{n+2} = (n+1)(W_n - W_{n+2})$ ce qui donne $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.

Montrons alors par récurrence sur p que pour $p \geqslant 0$, $W_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

— Pour $p = 0$,

$$W_1 = \int_0^{\pi/2} \cos u \, du = [\sin u]_0^{\pi/2} = 1 = \frac{2^0 \times (0!)^2}{1!}$$

— Soit $p \in \mathbb{N}$, on suppose que $W_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$ alors

$$W_{2p+3} = \frac{2p+2}{2p+3} W_{2p+1} = (2(p+1))^2 \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+3)!} = \frac{2^{2(p+1)}((p+1)!)^2}{(2p+3)!}$$

6) En utilisant la formule de Stirling, on voit que

$$W_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \times \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \sim \frac{1}{2n} \frac{2^{2n}(n/e)^{2n} 2\pi n}{(2n/e)^{2n}\sqrt{4\pi n}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

On en déduit que

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{4k^2 - 1}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{(2k-1)(2k+1)} = 4^n (n!)^2 \frac{\prod_{k=1}^{n} (2k)(2k)}{(2n)!(2n+1)!} = (2n+1) W_{2n+1}^2 \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$$

Cela implique que $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{4n^2 - 1}\right) = \frac{\pi}{2}$.

III - Étude d'une fonction définie par un produit infini

7) Soient $x \in \mathcal{S}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$,
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ $0 < 1 + f_k(x) \leqslant 1 + |f_k(x)|$. Donc $0 < P_n(x) \leqslant Q_n(x)$.

$$|P_{n+1}(x) - P_n(x)| = \Big|(1 + f_{n+1}(x))P_n(x) - P_n(x)\Big| = |f_{n+1}(x)| P_n(x) \leqslant |f_{n+1}(x)| \, Q_n(x) = Q_{n+1}(x) - Q_n(x).$$

8) Soient $x \in \mathcal{S}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$Q_{n+1}(x) - Q_n(x) = Q_n(x) \, |f_{n+1}(x)|$$

Or d'après la question 2), $Q_n(x) \leqslant e^{\sum_{k=1}^{n} |f_k(x)|}$.
Donc par croissance de l'exponentielle $Q_n(x) \leqslant e^{\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|} = e^{R_0(x)}$.
Or par continuité de la valeur absolue et des f_n, les $|f_n|$ sont continues. Comme $\sum |f_n|$ converge uniformément, R_0 est continue. Elle est donc majorée sur le segment S par un réel positif M.
Ainsi

$$\boxed{Q_{n+1}(x) - Q_n(x) \leqslant \mathrm{e}^M |f_{n+1}(x)|}$$

où $\boxed{M = \|R_0\|_\infty}$.

9) a) Soit $x \in \mathcal{S}$.
Par les deux questions précédentes on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ $0 \leqslant |P_{n+1}(x) - P_n(x)| \leqslant e^M |f_{n+1}(x)|$.
Or $\sum_{n \geqslant 1} |f_{n+1}(x)|$ converge car $\sum_{n \geqslant 1} |f_{n+1}|$ converge simplement (car uniformément).
Donc $\sum_{n \geqslant 1} |P_{n+1}(x) - P_n(x)|$ converge.
Ainsi $\sum_{n \geqslant 1} (P_{n+1}(x) - P_n(x))$ converge absolument, donc converge.
Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} (P_{n+1}(x) - P_n(x)) \right| \leqslant \sum_{n=N}^{\infty} |(P_{n+1}(x) - P_n(x))| \leqslant e^M \sum_{n=N}^{\infty} |f_{n+1}(x)|$$

Ainsi

$$0 \leqslant \left\| \sum_{n=N}^{\infty} (P_{n+1} - P_n) \right\|_\infty \leqslant e^M \left\| \sum_{n=N}^{\infty} |f_{n+1}| \right\|_\infty$$

Par convergence uniforme, $\|\sum_{n=N}^{\infty} |f_{n+1}|\|_\infty$ tend vers 0 quand N tend vers ∞.
Donc par encadrement, $\|\sum_{n=N}^{\infty} (P_{n+1} - P_n)\|_\infty$ tend vers 0 quand N tend vers ∞.
Donc $\boxed{\text{la série } \sum_{n \geqslant 1}^{\infty} (P_{n+1} - P_n) \text{ converge uniformément}}$

b) Notons pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $S_N = x \mapsto \sum_{n=1}^{N} (P_{n+1}(x) - P_n(x))$ et $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} (P_{n+1}(x) - P_n(x))$
On a pour tout $x \in \mathcal{S}$:

$$P_N(x) = P_1(x) + S_N(x) \underset{N \to \infty}{\to} P_1(x) + S(x)$$

Par convergence uniforme de (S_N) vers S, $(P_1 + S_N)$ converge uniformément vers $P_1 + S$ (car pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\|P - P_N\|_\infty = \|P_1 + S - (P_1 + S_N)\|_\infty = \|S - S_N\|_\infty$).
Donc $\boxed{(P_N) \text{ converge uniformément}}$ vers $P = P_1 + S$.

10) a) Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction P_n est continue comme produit de n fonctions continues, et comme (P_n) converge uniformément vers P, $\boxed{\text{la fonction } P \text{ est continue.}}$

b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in S$.
Comme pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ $1 + f_k(x) > 0$, on a :

$$\ln(P_n(x)) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + f_k(x))$$

Or $\sum_{k \geqslant 1} |f_k(x)|$ converge, donc $|f_k(x)| \underset{k \to \infty}{\to} 0$ donc$f_k(x) \underset{k \to \infty}{\to} 0$.
Ainsi $\ln(1 + f_k(x)) \underset{k \to \infty}{\sim} f_k(x)$ et donc $\sum_{k \geqslant 1} \ln(1 + f_k(x))$ converge absolument donc converge.
Donc $\ln(P_n(x)) \underset{n \to \infty}{\to} \sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + f_k(x)) \in \mathbb{R}$ et par continuité de exp on a :

$$\boxed{P(x) = e^{\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + f_k(x))} > 0}$$

.

11) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on pose $f(x) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - e^{-nx^2}\right)$.

a) Posons pour tout $n \geqslant 1$, $f_n : x \mapsto -e^{-nx^2}$
Soit $\mathcal{S} = [a, b]$ un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. Les fonctions f_n sont continues sur $\mathcal{S}$ et à valeurs strictement supérieures à -1. De plus pour tout $n \geqslant 1$, $\|f_n\|_{\infty,\mathcal{S}} = e^{-na^2} = (e^{-a^2})^n$. Comme $0 \leqslant e^{-a^2} < 1$, la série géométrique $\sum_{n\geqslant 1}(e^{-a^2})^n$ converge donc la série $\sum |f_n|$ converge normalement et donc uniformément sur $\mathcal{S}$.
Par les questions précédentes, f est définie est continue sur $\mathcal{S}$. Ceci pour tout segment $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}_+^*$. Donc $\boxed{f \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}_+^*}$.

b) Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x \leqslant y$.
Alors $-x^2 \geqslant -y^2$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$-nx^2 \geqslant -ny^2$$
$$e^{-nx^2} \geqslant e^{-ny^2} \text{ par croissance de l'exponentielle}$$
$$-e^{-nx^2} \leqslant -e^{-ny^2}$$
$$0 < 1 + f_n(x) \leqslant 1 + f_n(x)$$

Donc pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\prod_{n=1}^{N}(1 + f_n(x)) \leqslant \prod_{n=1}^{N}(1 + f_n(y))$$

Par passage aux limites dans les inégalités larges,

$$f(x) \leqslant f(y)$$

Donc $\boxed{f \text{ est croissante.}}$

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < P_n(x) \leqslant 1 + f_1(x) = 1 - e^{-x^2}$ car les facteurs $1 + f_k(x)$ sont compris entre 0 et 1.
Par passage aux limites quand $n \to \infty$ dans les inégalités larges :

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 1 - e^{-x^2}$$

Or

$$1 - e^{-x^2} \underset{x\to 0^+}{\to} 1 - 1 = 0$$

Par limite par encadrement, $\boxed{f(x) \underset{x\to 0^+}{\to} 0.}$

d) Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x > 0$, $f_n(x) = g_n(e^{-x^2})$ où $g_n : y \mapsto -y^n$ et que si $x \geqslant 1$ alors e_{-x^2} appartient au segment $\mathcal{S} = [0, \frac{1}{e}]$.
De plus les fonctions g_n sont continues, à valeurs dans $[-\frac{1}{e}, 0] \subset]-1, +\infty[$ et comme pour tout $n \geqslant 1$, $\|g_n\|_{\mathcal{S}} = \frac{1}{e^n}$, la série $\sum |g_n|$ converge normalement donc uniformément sur $\mathcal{S}$.
Par les questions précédentes, notant $P_n : y \mapsto \prod_{k=1}^{n}(1 + g_n(y))$, la suite (P_n) converge uniformément sur $\mathcal{S}$ vers $P : y \mapsto \prod_{k=1}^{\infty}(1 + g_n(y))$.
De plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P_n(y) \underset{y\to 0^+}{\to} \prod_{k=1}^{n}(1 + 0) = 1$$

Par le théorème de la double limite, $P(y) \underset{y\to 0^+}{\to} 1$.

Comme $e^{-x^2} \underset{x\to+\infty}{\to} 0^+$, on donc par composition des limites :

$$\boxed{f(x) = P(e^{-x^2}) \underset{x\to+\infty}{\to} 1}$$

12) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$
$\boxed{\text{La fonction } P_n \text{ est de classe } \mathscr{C}^1}$ comme produit de n fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et pour tout $x \in \mathcal{S}$,

$$P_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} (1+f_k)'(x) \prod_{j\in[\![1,n]\!]\setminus\{k\}} (1+f_j(x)) = \boxed{\sum_{k=1}^{n} f_k'(x)\frac{P_n(x)}{1+f_k(x)}}$$

13) Par la question précédente, la fonction $\ln\circ P_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ de dérivée $x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k'(x)}{1+f_k(x)}$.
Comme la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{f_k'(x)}{1+f_k(x)}$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$ et que la suite $(\log\circ P_n)$ converge simplement vers $\ln\circ P$ par continuité de ln, on en déduit que $\ln\circ P$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et a pour dérivée $x \mapsto \lim_{n\to\infty}(\log\circ P_n)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k'(x)}{1+f_k(x)}$.
Comme $P = \exp\circ(\ln\circ P)$ et comme exp est de classe $\mathscr{C}^1$, $\boxed{P \text{ et de classe } \mathscr{C}^1}$, et

$$\boxed{\frac{P'}{P} = (\ln\circ P)' : x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k'(x)}{1+f_k(x)}}$$