Devoir libre 8

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie notée n.
Soit f un endomorphisme non nul de E tel qu'il existe un entier $p > 1$ tel que $f^p = 0_{\mathscr{L}(E)} \neq f^{p-1}$.

Partie I

1. Déterminer les réels $a_1, \ldots, a_{p-1}$ tels que $\sqrt{1+x} = 1 + a_1 x + \ldots + a_{p-1}x^{p-1} + \ \mathrm{o}_{x\to 0}(x^{p-1})$.
   Exprimer ces coefficients à l'aide de factorielles.
   Dans la suite, on notera P_p le polynôme $1 + a_1 X + \ldots + a_{p-1}X^{p-1}$.
2. Que dire de $1 + x - P_p^2(x)$ quand x tend vers 0 ? En déduire que le polynôme $1 + X - P_p^2$ est divisible par X^p.
3. Montrer que le polynôme minimal de f, noté Π_f, est égal à X^p.
4. Montrer qu'en posant $g = P_p(f)$, on a $g^2 = \mathrm{id}_E + f$.
5. **Application numérique :**
   On pose $A = \begin{pmatrix} -5 & 9 & 2 \\ -3 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
   En utilisant ce qui précède, trouver une matrice B telle que $B^2 = I_3 + A$.

Partie II

6. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est libre.
   En déduire que $p \leqslant n$ et que $f^n = 0$.
7. Montrer que s'il existe un endomorphisme g de E tel que $g^2 = f$, alors $2p - 1 \leqslant n$.

On suppose désormais que $\boxed{p = n}$. Selon la question 6), il existe un vecteur x_0 dans E tel que la famille $\mathscr{B} = (x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ soit libre. C'est donc une base de E ; on posera $x_i = f^i(x_0)$ pour $i = 1, \cdots, n$.
On rappelle que selon la question 3), on a : $\Pi_f = X^n$ car ici, $p = n$.

8. Soit g un endomorphisme de E tel que $g \circ f = f \circ g$.
   On note $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ les coordonnées de $g(x_0)$ dans $\mathscr{B}$: $g(x_0) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i\ x_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i\ f^i(x_0)$.
   Calculer les coordonnées dans $\mathscr{B}$ du vecteur $g(x_1) = g(f(x_0))$, puis celles de $g(x_2) = g(f^2(x_0))$, ..., de $g(x_{n-1}) = g(f^{n-1}(x_0))$.
   En déduire que g est un polynôme en f : $g = T(f)$, avec $T \in \mathbb{R}[X]$.
9. Soit g un endomorphisme de E tel que $g^2 = \mathrm{id}_E + f$. Montrer que g est un polynôme en f.
10. Soient g, h des endomorphismes de E tels que $g^2 = h^2 = \mathrm{id}_E + f$. D'après la question précédente, il existe des polynômes $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $g = P(f)$ et $h = Q(f)$.
    a) Montrer que $P^2 - Q^2$ est divisible par X^n.
    b) On veut montrer que X^n divise $P - Q$ ou divise $P + Q$, pour cela on raisonne par l'absurde : on suppose qu'aucun des polynômes $P + Q$ et $P - Q$ ne soit divisible par X^n. Montrer qu'ils sont alors tous deux divisibles par X.
    Que dire alors du polynôme P ? En déduire que g n'est pas injective. Trouver une contradiction.
    Que peut-on finalement en déduire sur g et h ?
    c) Combien d'endomorphismes de E ont un carré égal à $\mathrm{id}_E + f$?
    Même question pour les racines carrées de $\alpha \mathrm{id}_E + f$ lorsque α est un réel strictement positif.