Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Toutes les variables aléatoires seront définies sur cet espace.
On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ de variables aléatoires discrètes réelles et X une variable aléatoire discrète réelle.
On note $C = \{\omega \in \Omega \mid (X_n(\omega)) \to X(\omega)\}$.

1) On pose, pour tout $\varepsilon > 0$, $B(\varepsilon) = \displaystyle\bigcup_{N\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{n\geqslant N} (|X_n - X| \leqslant \varepsilon) \right)$.
   a) Justifier, pour tout $\varepsilon > 0$, l'appartenance de $B(\varepsilon)$ à $\mathscr{A}$.
   b) Établir l'égalité : $C = \displaystyle\bigcap_{\varepsilon>0} B(\varepsilon)$ et en déduire que $C \in \mathscr{A}$.
   On pourra considérer les événements $B(\frac{1}{k})$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

On dit que la la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ converge *presque sûrement* vers X si $\mathbf{P}(C) = 1$. On note alors $(X_n) \xrightarrow{p.s} X$.

2) On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$ converge. Montrer que dans ce cas, $(X_n) \xrightarrow{p.s} X$.
   On pourra commencer par exprimer $\overline{C}$ en fonction des événements $A_n(\frac{1}{k})$ où, pour tous $n \geqslant 0$ et $k \geqslant 1$, $A_n(\frac{1}{k}) = (|X_n - X| > \frac{1}{k})$.
3) On pose pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $\varepsilon > 0$, $D_N(\varepsilon) = \left(\sup_{n\geqslant N} |X_n - X| > \varepsilon\right)$
   a) Justifier que pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $\varepsilon > 0$, $D_N(\varepsilon) \in \mathscr{A}$.
   b) Montrer que $(X_n) \xrightarrow{p.s} X$ si et seulement si , pour tout $\varepsilon > 0$:
$$\lim_{N\to+\infty} \mathbf{P}\left(D_N(\varepsilon)\right) = 0$$

On dit que la la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ converge *en probabilité* vers X et on note $(X_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ si pour tout $\varepsilon > 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$.

4) Déduire de la question précédente que si $(X_n) \xrightarrow{p.s} X$ alors $(X_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} X$.
5) Soit $(\lambda_k)_{k\geqslant 0}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \lambda_k$ converge et on note Λ sa somme. On considère alors une suite $(Y_k)_{k\geqslant 0}$ de variables aléatoires indépendantes telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Y_k \sim \mathscr{P}(\lambda_k)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} Y_k$. On pose aussi $X : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ définie par
$$X : \omega \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(\omega)$$
   a) Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer la loi de X_n.
   On pourra procéder par récurrence.
   b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $(X > k)$ est un événement et que
$$\mathbf{P}(X > k) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(X_n > k)$$

c) En déduire que : $\mathbf{P}(X > k) = e^{-\Lambda} \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\Lambda^i}{i!}$.

d) En déduire que X est une variable aléatoire discrète et préciser sa loi. En particulier on précisera $\mathbf{P}(X = +\infty)$.

e) Montrer que la suite (X_n) converge en probabilité vers X.

f) Montrer que la suite (X_n) converge presque sûrement vers X dans le cas où la série $\sum_{k \geqslant 0} k\lambda_k$ converge.