1) On pose, pour tout $\varepsilon > 0$, $B(\varepsilon) = \displaystyle\bigcup_{N\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{n\geqslant N} (|X_n - X| \leqslant \varepsilon) \right)$.

   a) Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n et X sont des variables aléatoires donc $|X_n - X|$ aussi. On en déduit que $(|X_n - X| \leqslant \varepsilon) \in \mathscr{A}$.
   La tribu $\mathscr{A}$ étant stable par intersection dénombrable, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\bigcap_{n\geqslant N} (|X_n - X| \leqslant \varepsilon) \in \mathscr{A}$.
   La tribu $\mathscr{A}$ étant stable par union dénombrable, $B(\varepsilon) \in \mathscr{A}$.

   b) Soit $\omega \in \Omega$, la définition du fait que la suite $(X_n(\omega))_{n\geqslant 0}$ converge vers $X(\omega)$ peut s'écrire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |X_n(\omega) - X(\omega)| \leqslant \varepsilon$$

   Donc $\mathscr{C} = \displaystyle\bigcap_{\varepsilon>0} B(\varepsilon)$.
   Comme pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k} > 0$, $\mathscr{C} \subset \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} B(\frac{1}{k})$.
   De plus tout $\varepsilon > 0$, il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{k_0} \leqslant \varepsilon$ et donc $B(\frac{1}{k_0}) \subset B(\varepsilon)$. On en déduit que $\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} B(\frac{1}{k}) \subset B(\varepsilon)$ et donc que $\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} B(\frac{1}{k}) \subset \mathscr{C}$.
   Finalement $\mathscr{C} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} B(\frac{1}{k})$. Il appartient donc à $\mathscr{A}$ car la tribu est stable par intersection dénombrable.

2) D'après la question précédente, pour montrer que $\mathbf{P}(\mathscr{C}) = 1$ il suffit de montrer que $\mathbf{P}(\overline{\mathscr{C}}) = 0$. Or

$$\overline{\mathscr{C}} = \bigcup_{\varepsilon>0} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant N} A_n(\varepsilon) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant N} A_n\left(\frac{1}{k}\right)$$

   où $A_n(\varepsilon) = (|X_n - X| > \varepsilon)$.
   On sait qu'une union dénombrable d'événements négligeables est négligeable. On en déduit que pour montrer que $(X_n) \xrightarrow{p.s} X$, il suffit de montrer que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant N} A_n\left(\frac{1}{k}\right)\right) = 0$.
   On considère donc $k \in \mathbb{N}^*$ et on pose $\varepsilon = \frac{1}{k}$. D'après l'inégalité de Boole, pour tour $N \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n\geqslant N} A_n(\varepsilon)\right) \leqslant \sum_{k=N}^{\infty} \mathbf{P}(A_n(\varepsilon))$$

   Le terme de droite est le reste d'une série convergente. Il tend donc vers 0 quand $N \to +\infty$. Il en est de même pour celui de gauche par encadrement.
   La suite d'événements $\left(\bigcup_{n\geqslant N} A_n(\varepsilon)\right)_{N\in\mathbb{N}}$ est décroissante. On en déduit que

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant N} A_n\left(\frac{1}{k}\right)\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathbf{P}\left(\bigcup_{n\geqslant N} A_n(\varepsilon)\right) = 0$$

   On a bien montré que $(X_n) \xrightarrow{p.s} X$.

3) a) Soit $\varepsilon > 0$. On voit que $D_N(\varepsilon) = \bigcup_{n \geqslant N} (|X_n - X| > \varepsilon)$. En effet pour $\omega \in \Omega$,

$$\begin{aligned} \omega \in D_N(\varepsilon) &\iff \sup_{n \geqslant N} |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon \\ &\iff \exists k \geqslant N, |X_k(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon \\ &\iff \exists k \geqslant N, \omega \in (|X_n - X| > \varepsilon) \\ &\iff \omega \in \bigcup_{n \geqslant N} (|X_n - X| > \varepsilon) \end{aligned}$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(|X_n - X| > \varepsilon) \in \mathscr{A}$, $D_N(\varepsilon) \in \mathscr{A}$.

b) Par définition de la borne supérieure, $\sup_{n \geqslant N} |X_n - X| \geqslant \sup_{n \geqslant N+1} |X_n - X|$ ce qui implique que $D_{N+1}(\varepsilon) \subset D_N(\varepsilon)$ et donc la suite $(D_N(\varepsilon))_{N \geqslant 0}$ est décroissante. Dès lors par continuité décroissante

$$\lim_{N \to +\infty} \mathbf{P}\left(\sup_{n \geqslant N} |X_n - X| > \varepsilon\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{N \in \mathbb{N}} D_N(\varepsilon)\right)$$

De plus, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\overline{D_N(\varepsilon)} = \bigcap_{n \geqslant N} (|X_n - X| \leqslant \varepsilon)$$

On en déduit que $\bigcup_{N \in \mathbb{N}} \overline{D_N(\varepsilon)} = B(\varepsilon)$ et donc $\overline{B(\varepsilon)} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_N(\varepsilon)$.

Comme ci-dessus,

$$\begin{aligned} (X_n) \xrightarrow{p.s} X &\iff \mathbf{P}(C) = 1 \\ &\iff \forall \varepsilon > 0, \mathbf{P}(B(\varepsilon)) = 1 \\ &\iff \forall \varepsilon > 0, \mathbf{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_N(\varepsilon)\right) = 0 \\ &\iff \forall \varepsilon > 0, \lim_{N \to +\infty} \mathbf{P}\left(\sup_{n \geqslant N} |X_n - X| > \varepsilon\right) = 0 \end{aligned}$$

4) Pour $N \in \mathbb{N}$, $\sup_{n \geqslant N} |X_n - X| \geqslant |X_N - X|$ donc pour tout $\varepsilon > 0$,

$$(|X_N - X| > \varepsilon) \subset \left(\sup_{n \geqslant N} |X_n - X| > \varepsilon\right)$$

On en déduit que

$$\mathbf{P}\left(|X_N - X| > \varepsilon\right) \leqslant \mathbf{P}\left(\sup_{n \geqslant N} |X_n - X| > \varepsilon\right)$$

En utilisant la question précédente, si $(X_n) \xrightarrow{p.s} X$ alors $(X_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} X$.

5) a) Commençons par montrer que si Y_1 et Y_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres μ_1 et μ_2 respectivement alors $Y_1 + Y_2 \hookrightarrow \mathscr{P}(\mu_1 + \mu_2)$. En effet comme $Y_1(\Omega) = Y_2(\Omega) = \mathbb{N}$, $(Y_1 + Y_2)(\Omega) \subset \mathbb{N}$. De plus pour $n \in \mathbb{N}$, en utilisant

que $((Y_1=k))_{k\geqslant 0}$ est un système complet d'événements,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Y_1+Y_2=n) &= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{P}((Y_1+Y_2=n)\cap(Y_1=k)) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{P}((Y_1=k)\cap(Y_2=n-k)) \\
&\overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{P}(Y_1=k)\ \mathbf{P}(Y_2=n-k) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{e^{-\mu_1}\mu_1^k}{k!}\frac{e^{-\mu_2}\mu_2^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \frac{e^{-(\mu_1+\mu_2)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mu_1^k\mu_2^{n-k} \\
&= \frac{e^{-(\mu_1+\mu_2)}(\mu_1+\mu_2)^n}{n!}
\end{aligned}$$

On peut alors montrer par récurrence que pour tout $n\geqslant 1$, $X_n\hookrightarrow\mathscr{P}(\Lambda_n)$ où $\Lambda_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\lambda_k$.

L'initialisation est évidente. Pour l'hérédité, on suppose que $X_n\hookrightarrow\mathscr{P}(\Lambda_n)$. D'après le lemme des coalitions $X_n\perp\!\!\!\perp Y_{n+1}$. Le calcul ci dessus donne alors que $X_{n+1}=X_n+Y_{n+1}\hookrightarrow\mathscr{P}(\Lambda_{n+1})$ car $\Lambda_{n+1}=\Lambda_n+\lambda_{n+1}$.

b) Pour tout $\omega\in\Omega$ la suite $(X_n(\omega))_{n\geqslant 0}$ est croissante comme suite des sommes partielles d'une série à termes positifs. Ainsi $X(\omega)=\sup_{n\in\mathbb{N}}X_n(\omega)$.
Donc

$$X(\omega)>k\Leftrightarrow(k\text{ ne majore pas }(X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}})\Leftrightarrow(\exists n\in\mathbb{N},\ X_n(\omega)>k)$$

Ainsi $(X>k)=\cup_{n\in\mathbb{N}}(X_n>k)$.
Comme $\mathbb{N}$ est dénombrable et que les $(X_n>k)$ sont des événements car les X_n sont des variables aléatoires discrètes, $(X>k)$ est un événement.
De plus la suite $((X_n>k))_{n\geqslant 1}$ est croissante (au sens de l'inclusion) car pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $\omega\in(X>k)$,

$$X_{n+1}(\omega)\ \geqslant\ X_n(\omega)>k$$

Donc par continuité croissante, $\mathbf{P}(X>k)=\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{P}(X_n>k)$.

c) Par les deux questions précédentes, on a pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}(X>k)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=k+1}^{\infty}\mathbf{P}(X_n=i)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=k+1}^{\infty}f_i(n)$$

où $f_i:n\mapsto e^{-\Lambda_n}\frac{\Lambda_n^i}{i!}$ avec Λ_n comme ci-dessus.
Or la série $\sum_{i>k}f_i$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{N}$ car pour tout $i>k$, $\|f_i\|_{\infty,\mathbb{N}}\leqslant\frac{\Lambda^i}{i!}$ qui est le terme général d'une série convergente.
De plus par continuité de l'exponentielle et de la multiplication, pour tout $i>k$, $f_i(n)\to e^{-\Lambda}\frac{\Lambda^i}{i!}$ quand $n\to+\infty$.
Donc par le théorème de double limite,

$$\mathbf{P}(X>k)=\sum_{i=k+1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}f_i(n)=e^{-\Lambda}\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{\Lambda^i}{i!}$$

d) Ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(X > k-1) - \mathbf{P}(X > k) = e^{-\Lambda} \frac{\Lambda^k}{k!}$$

Cela montre que X suit la loi de Poisson de paramètre Λ.
Donc $\mathbf{P}(X = \infty) = 1 - \mathbf{P}(X \in \mathbb{N}) = 1 - 1 = 0$.

e) Par le même raisonnement, $X - X_n$ suit la loi $\mathscr{P}(\Lambda - \Lambda_n)$ donc pour tout $\varepsilon > 0$,

$$0 \leqslant \mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \leqslant 1 - \mathbf{P}(X - X_n = 0) = 1 - e^{\Lambda_n - \Lambda}$$

Par continuité de l'exponentielle et limite par encadrement, $\mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \to 0$ quand $n \to \infty$.
Donc (X_n) converge en probabilité vers X.

f) Par le raisonnement précédent et la question 2), il suffit pour établir la convergence presque sûre de (X_n) vers X de s'assurer de la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 0}(1 - e^{\Lambda_n - \Lambda})$.
Comme (Λ_n) converge vers Λ on a :

$$1 - e^{\Lambda_n - \Lambda} \sim \Lambda - \Lambda_n \geqslant 0$$

donc il suffit d'établir la convergence de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} (\Lambda - \Lambda_n) = \sum\limits_{n \geqslant 0} \left(\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k \right)$.
Or, par sommation par paquets dans $[0, +\infty]$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k \right) = \sum_{0 \leqslant n < k \leqslant +\infty} \lambda_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{k-1} \lambda_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} k\lambda_k < +\infty$$

ce qu'il suffisait de démontrer.