MP1 / MP2 2024 – 2025

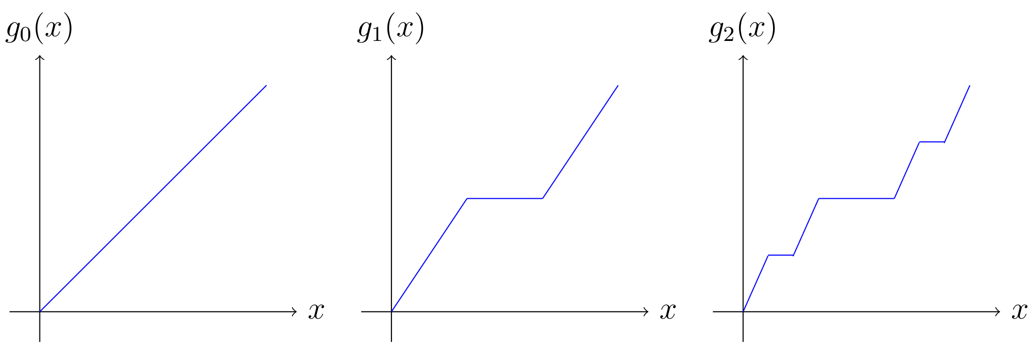
Devoir libre 6 - Corrigé

Exercice I

1) Soit $f \in H$. Commençons par remarquer que si $x \in [0, \frac{1}{3}[$, $3x \in [0,1]$ et que si $x \in [\frac{2}{3}, 1]$, $3x - 2 \in [0,1]$ donc $T(f)$ est définie sur $[0,1]$.
De plus, $T(f)(0) = \frac{1}{2}f(0) = 0$ et $T(f)(1) = \frac{1}{2}(1 + f(1)) = 1$.
Ensuite, $T(f)$ est continue d'après les théorèmes généraux sur $[0,1] \setminus \{\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\}$. Pour finir, $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}^-} T(f)(x) = \frac{1}{2}$ car $f(1) = 1$ et $\lim\limits_{x \to \frac{2}{3}^+} T(f)(x) = \frac{1}{2}$ car $f(0) = 0$.
On a bien montré que $T(f) \in H$.

2) Soit $f, g \in H^2$. Soit $x \in [0,1]$.
— Si $x < \frac{1}{3}$, $|T(f)(x) - T(g)(x)| = \frac{1}{2}|f(3x) - g(3x)| \leqslant \frac{1}{2}||f-g||_\infty$.
— Si $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, $|T(f)(x) - T(g)(x)| = 0 \leqslant \frac{1}{2}||f-g||_\infty$.
— Si $x > \frac{2}{3}$,
$$|T(f)(x) - T(g)(x)| = \frac{1}{2}|1 + f(3x-2) - 1 - g(3x-2)| = \frac{1}{2}|f(3x-2) - g(3x-2)| \leqslant \frac{1}{2}||f-g||_\infty$$
On en déduit que dans tous les cas, $|T(f)(x) - T(g)(x)| \leqslant \frac{1}{2}||f-g||_\infty$. Cela implique que $||T(f) - T(g)||_\infty \leqslant \frac{1}{2}||f-g||_\infty$.

3) Voici les graphes des fonctions g_0, g_1 et g_2



4) Soit $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, par téléscopage, $g_n(x) = g_0(x) + \sum\limits_{k=0}^{n-1} g_{k+1}(x) - g_k(x)$.
En utilisant la question 2) on voit que pour tout entier n,
$$||g_{n+2} - g_{n+1}||_\infty = ||T(g_{n+1}) - T(g_n)||_\infty \leqslant \frac{1}{2}||g_{n+1} - g_n||_\infty$$
Par une récurrence immédiate,
$$\forall n \in \mathbb{N}, ||g_{n+1} - g_n||_\infty \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n ||g_1 - g_0||_\infty$$
En particulier, pour $x \in [0,1]$, $|g_{n+1}(x) - g_n(x)| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n ||g_1 - g_0||_\infty$. Cela montre que la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} g_{k+1}(x) - g_k(x)$ est absolument convergente donc convergente. Finalement la suite de fonctions (g_n) converge simplement vers la fonction g définie par
$$g : x \mapsto g_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty} g_{k+1}(x) - g_k(x)$$

5) On remarque pour commencer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n(0) = 0$ et $g_n(1) = 1$. Par passage à la limite, $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$.

Montrons maintenant que g est continue. Posons S la somme de la série de fonctions $\sum\limits_{k \geqslant 0} g_{k+1} - g_k$.

— Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g_{k+1} - g_k$ est continue sur $[0, 1]$.

— On a vu que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $||g_{k+1} - g_k||_\infty \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^k ||g_1 - g_0||_\infty$. On en déduit que la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} ||g_{k+1} - g_k||_\infty$ converge. Cela montre que la série de fonctions $\sum\limits_{k \geqslant 0} g_{k+1} - g_k$ converge normalement donc uniformément sur $[0, 1]$

On en déduit que S est continue et donc que $g = g_0 + S$ aussi.

6) On a $K_1 = h_0(K_0) \cup h_1(K_0) = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. On a alors

$$K_2 = h_0(K_1) \cup h_1(K_1) = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

7) Commençons par remarquer que si $I = [a, b]$ alors $h_0(I)$ et $h_1(I)$ sont des segments. Plus généralement si $A = I_1 \cup \cdots \cup I_m$ est une union disjointe de m segments alors $h_0(I)$ et $h_1(I)$ sont des réunions disjointes de m segments. Cela permet de montrer par récurrence que pour tout $n \in N$, K_n est la réunion de 2^n segments disjoints. On utilise que comme $K_n \subset [0, 1]$, $h_0(K_n) \subset [0, \frac{1}{3}]$ et $h_1(K_n) \subset [\frac{2}{3}, 1]$. On en déduit que U_n est une union d'un nombre fini d'intervalles ouverts. Si on veut justifier ce résultat on peut fixer des notations ; on pose $K_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} [a_{n,k}, b_{n,k}]$ où $0 = a_{n,0} < b_{n,0} < a_{n,1} < \cdots < b_{n,2^n-1} < a_{n,2^n} < b_{n,2^n} = 1$. On en déduit que

$$U_n = \bigcup_{k=1}^{2^n-1}]b_{n,k}, a_{n,k+1}[$$

Soit $x \in U$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in U_n$. Il existe alors $k \in [\![1, 2^n - 1]\!]$ tel que $x \in]b_{n,k}, a_{n,k+1}[$. Il suffit de poser $\varepsilon = \frac{1}{2}\min(x - b_{n,k}, a_{n,k+1} - x)$ pour avoir $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset U_n \subset U$.

En déduire que pour tout $x \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\in U$.

8) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$P(n)$: Pour chaque sous-intervalle J de U_n, il existe α_J tel que pour $m \geqslant n$, g_m est constante égale à α_J.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

— Initialisation : Pour $n = 0$, $P(0)$ est vraie car $U_0 = \emptyset$.

— Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(n)$ est vraie. Montrons $P(n+1)$. On remarque que h_0 réalise une bijection de $[0, 1]$ dans $[0, \frac{1}{3}]$. Comme $[0, 1] = K_n \cup U_n$ on en déduit que $[0, \frac{1}{3}] = h_0(K_n) \cup h_0(U_n)$. De même, $[\frac{2}{3}, 1] = h_1(K_n) \cup h_1(U_n)$. On obtient alors que

$$U_{n+1} = [0, 1] \setminus (h_0(K_n) \cup h_1(K_n)) = h_0(U_n) \cup \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[\cup h_1(U_n)$$

En particulier, les sous-intervalles de U_{n+1} sont $\left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$ et les intervalles $h_0(J')$, $h_1(J')$ où J' est un sous-intervalle de U_n.

— Si $J = \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$. Pour tout $m \geqslant n+1$, par définition, $g_m = T(g_{m-1})$ où $m - 1 \geqslant n$. On en déduit que g_m est constante égale à $\frac{1}{2}$ sur J.

— Si J un sous-intervalle de U_{n+1} de la forme $h_0(J')$ où J' est un sous-intervalle de U_n. Par récurrence, il existe $\alpha_{J'}$ tel que pour tout $k \geqslant n$ et tout $x \in J'$, $g_k(x) = \alpha_{J'}$.

Soit $m \geqslant n+1$, comme $J \subset [0, \frac{1}{3}[$, pour tout $x \in J$,

$$g_m(x) = T(g_{m-1})(x) = \frac{1}{2} g_{m-1}(3x) = \frac{1}{2} \alpha_{J'}$$

En effet, si $x \in J$ alors $3x \in J'$. On pose alors $\alpha_J = \frac{1}{2}\alpha_{J'}$.

On fait de même si J est de la forme $h_1(J')$.

— Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Soit $x \in U$. D'après la question précédente il existe $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ telle que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ est inclus dans U_n. On en déduit qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $m \geqslant n$, et tout $y \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$, $g_m(y) = \alpha$. En passant à la limite quand m tend vers $+\infty$, on obtient que g est constante et égale à α sur $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$.

On en déduit que g est dérivable sur U et que $\forall x \in U, g'(x) = 0$

Exercice II

1) Pour tout $t \in]-1,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n(t)| \leqslant |t|^n$ donc la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n(t)$ converge absolument donc converge. Ainsi la série de fonctions $\sum f_n$ $\boxed{\text{converge simplement sur }]-1,1[}$.

2) Soit $a \in]0,1[$.

a) Pour tout $t \in]-1,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n'(t) = t^{n-1}\sin(nt) + t^n\cos(nt)$$

$$|f_n'(t)| \leqslant |t^{n-1}\sin(nt)| + |t^n\cos(nt)| \leqslant 2a^{n-1}$$

Donc $||f_n'||_{\infty,[-a,a]} \leqslant 2a^{n-1}$.

Donc la série $\sum f_n'$ $\boxed{\text{converge normalement sur } [-a,a]}$.

b) Les fonctions f_n sont de classe $\mathscr{C}^1$, la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]-1,1[$ et la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de $]-1,1[$. Donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ et pour tout $t \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}
f'(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1}\sin(nt) + t^n\cos(nt) \\
&= \mathfrak{Im}(\sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1}e^{int}) + \mathfrak{Re}(\sum_{n=1}^{\infty} t^n e^{int}) \\
&= \mathfrak{Im}\frac{t^0 e^{it}}{1-te^{it}} + \mathfrak{Re}\frac{t^1 e^{it}}{1-te^{it}} \\
&= \frac{\mathfrak{Im}(e^{it}(1-te^{-it})) + \mathfrak{Re}(te^{it}(1-te^{-it}))}{(1-te^{it})(1-te^{-it})} \\
f'(t) &= \boxed{\frac{\sin t + t\cos t - t^2}{1-2t\cos t + t^2}}
\end{aligned}$$

c) Soit $g : t \mapsto \arctan\left(\frac{t\sin t}{1-t\cos t}\right)$.

Pour tout $t \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}
g'(t) &= \frac{(\sin t + t\cos t)(1-t\cos t) - t\sin t(-\cos t + t^2\sin t)}{(1-t\cos t)^2} \times \frac{1}{1+\frac{t^2\sin^2 t}{(1-t\cos t)^2}} \\
&= \frac{\sin t - t\sin t\cos t + t\cos t - t^2\cos^2 t + t\sin t\cos t - t^2\sin^2 t}{1-2t\cos t + t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t} \\
&= f'(t)
\end{aligned}$$

et $f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0 = g(0)$.

Donc $\boxed{\forall t \in]-1,1[\quad f(t) = g(t)}$.

3) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [-1,1]$,

$$\begin{aligned}
|A_n(t)| &= \left|\mathfrak{Im}\frac{te^it(1-t^ne^{int})}{1-te^{it}}\right| \\
&\leqslant \left|\frac{te^it(1-t^ne^{int})}{1-te^{it}}\right| \\
&\leqslant \frac{2}{|1-te^{it}|}
\end{aligned}$$

Or la fonction $t \mapsto \frac{2}{|1-te^{it}|}$ est continue sur le segment $[-1,1]$ (le dénominateur ne s'annule jamais car si $|t|<1$ alors $|te^{it}|<1$, et si $|t|=1$ alors $te^{it}=e^{\pm i} \neq 1$), donc elle est majorée. Notant M sa borne supérieure (qu'elle atteint), on a :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } t \in [-1,1],\ |A_n(t)| \leqslant M}.$$

b) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [-1,1]$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{t^k \sin kt}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k(t)}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{A_{k-1}(t)}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k(t)}{k} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{A_i(t)}{i+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} A_k(t)\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) + \frac{A_n(t)}{n} \qquad \text{car } A_0(t)=0 \\
&= \boxed{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k(t)}{k(k+1)} + \frac{A_n(t)}{n}}
\end{aligned}$$

c) Posons $g_k : t \in [-1,1] \mapsto \frac{A_k(t)}{k(k+1)}$

On a $\forall k \geqslant 1 \quad ||g_k||_{\infty,[-1,1]} \leqslant \frac{M}{k(k+1)} \leqslant \frac{M}{k^2}$. Donc $\boxed{\text{la série } \sum g_k \text{ converge normalement}}$ et donc uniformément sur $[-1,1]$.

Par ailleurs la **suite** de fonctions (A_n/n) converge uniformément vers la fonction nulle car $||A_n/n||_{\infty,[-1,1]} \leqslant M/n$.

Donc la suite de fonctions $t \mapsto \sum_{k=1}^{n} f_k(t)$ converge unirformément sur $[-1,1]$. Ainsi la série de fonctions $\boxed{\sum_{k\geqslant 1} f_k \text{ converge uniformément sur } [-1,1]}$. De plus pour tout $t \in [-1,1]$

$$\boxed{f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) + 0}$$

(bien remarquer le fait suivant : les deux séries $\sum f_k$ et $\sum g_k$ convergent uniformément et ont même somme, mais on a convergence normale que pour la série $\sum g_k$).

Par continuité des f_k (ou des g_k) et convergence uniforme, $\boxed{f \text{ est continue sur } [-1,1]}$.

d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n} = f(1)$

Comme f est continue en 1,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n} &= \lim_{1^-} f = \lim_{t\to 1^-} \arctan \frac{t\sin t}{1-t\cos t} \\
&= \arctan \frac{\sin 1}{1-\cos 1} \quad \text{car arctan est continue} \\
&= \arctan \frac{2\sin(1/2)\cos(1/2)}{2\sin^2(1/2)} = \arctan \operatorname{cotan}(1/2) \\
&= \frac{\pi}{2} - \arctan(\tan(1/2)) = \boxed{\frac{\pi-1}{2}}
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{n} &= \lim_{(-1)^+} (-f) = -\lim_{t\to(-1)^+} \arctan \frac{t\sin t}{1-t\cos t} \\
&= -\arctan \frac{\sin 1}{1+\cos 1} = \arctan \frac{2\sin(1/2)\cos(1/2)}{2\cos^2(1/2)} = \boxed{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$