Devoir Surveillé 2

Calculatrices interdites. L'exercice et le problème sont indépendants.

Exercice

On pose φ_0 la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\varphi_0 : t \mapsto e^{-t^2}$$

1) Justifier que φ_0 est intégrable sur $[0,+\infty[$.

On pose pour tout $x \in [0,+\infty[$, $\varphi_1(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$

2) Montrer que φ_1 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et calculer φ_1'.
3) a) Justifier que pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2x}e^{-x^2} - \int_x^{+\infty} \frac{1}{2t^2}e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

   b) En déduire un équivalent simple de φ_1 quand x tend vers $+\infty$.
   c) Justifier que φ_1 est intégrable sur $[0,+\infty[$.
   d) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_1(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$.
   On pourra intégrer par parties en utilisant 2.
4) Montrer que l'on peut construire une suite de fonctions $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de classe $\mathscr{C}^1$, intégrables sur $[0,+\infty[$ telle que $\psi_0 = \varphi_0$ et, pour tout $k \geqslant 0$,

$$\psi_{k+1} : x \mapsto \int_x^{+\infty} \psi_k(t)\mathrm{d}t$$

   On précisera en particulier un équivalent simple de ψ_k en $+\infty$.

Problème

Notations

- $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- $\mathbb{K}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Dans ce problème, on identifie polynômes formels et fonctions polynomiales de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ associées. On identifie de plus les éléments de $\mathbb{K}$ aux polynômes constants.
- Tout polynôme $p \in \mathbb{K}[X]$ s'écrit de manière unique

$$p = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$$

où (a_k) est une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ nulle à partir d'un certain rang. Si p n'est pas le polynôme nul, son degré $\deg(p)$ est le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$. Par convention, le degré du polynôme nul est -1 (cette convention est inhabituelle).
- Si n est un entier naturel, $\mathbb{K}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
- On note $\mathscr{L}(\mathbb{K}[X])$ l'ensemble des endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$.
- On note I l'endomorphisme identité de $\mathbb{K}[X]$.
- Les éléments inversibles de $\mathscr{L}(\mathbb{K}[X])$ sont les endomorphismes bijectifs (automorphismes) de l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$.
- Pour $T \in \mathscr{L}(\mathbb{K}[X])$ et $p \in \mathbb{K}[X]$, on note $Tp = T(p)$.
- On désigne par D l'endomorphisme de dérivation sur $\mathbb{K}[X]$: $\forall p \in \mathbb{K}[X], D(p) = Dp = p'$.
- Si T est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$, on définit la suite d'endomorphismes $\left(T^k\right)$ par récurrence : $T^0 = I$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}, T^{k+1} = T \circ T^k = T^k \circ T$.

I - Étude d'endomorphismes de $\mathbb{K}[X]$

I.A - Soit $a \in \mathbb{K}$. Pour tout $p \in \mathbb{K}[X]$, on pose $E_a(p) = E_a p = p(X + a)$.

Q.1. Montrer que E_a est un automorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

I.B - À tout $p \in \mathbb{R}[X]$, on associe la fonction $J(p) = Jp$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad J(p)(x) = Jp(x) = \int_x^{x+1} p(t)\mathrm{d}t$$

Q 2. Montrer que J est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Q 3. Montrer que J conserve le degré et que J est inversible.

I.C - À tout $p \in \mathbb{K}[X]$, on associe la fonction $L(p) = Lp$ de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad L(p)(x) = Lp(x) = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} p'(x + t)\mathrm{d}t$$

Q 4. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^k \, \mathrm{d}t$ existe pour tout $k \in \mathbb{N}$ et calculer sa valeur.

Q 5. Montrer que L est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$. Est-il inversible ?

II - Formule de Taylor pour les endomorphismes shift-invariants de $\mathbb{K}[X]$

Soit T un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$. On dit que :

— T est *shift-invariant* si, pour tout $a \in \mathbb{K}, E_a \circ T = T \circ E_a$

— T est un *endomorphisme delta* si T est shift-invariant et si l'image du polynôme X par T est une constante non nulle : $TX \in \mathbb{K}^*$.

II.A -

Q 6. Soit $a \in \mathbb{K}$. Vérifier que les endomorphismes I et D sont shift-invariants, ainsi que les endomorphismes E_a, J et L définis dans la partie I. Sont-ils des endomorphismes delta ?

Q 7. L'ensemble S des endomorphismes shift-invariants de $\mathbb{K}[X]$ est-il stable par combinaison linéaire ? par composition ? Mêmes questions pour l'ensemble Δ des endomorphismes delta de $\mathbb{K}[X]$.

II.B -

Q 8. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. Pour tout polynôme $p \in \mathbb{K}[X]$, montrer que l'expression $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k p$ a un sens et définit un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

On note alors $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k$ l'application de $\mathbb{K}[X]$ qui, à $p \in \mathbb{K}[X]$, associe le polynôme $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k p$. On remarquera que cette somme à support infini n'a pas de sens concret. Pour manipuler correctement de telles applications, il conviendra systématiquent de les évaluer afin d'avoir des sommes à support fini.

Q 9. Montrer que, pour toute suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k$ est un endomorphisme shift-invariant.

Q 10. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ telles que $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k D^k$.

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}, a_k = b_k$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme $q_n = \dfrac{X^n}{n!}$. On se donne T un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

Q 11. Montrer que T est un endomorphisme shift-invariant si, et seulement si,

$$T = \sum_{k=0}^{+\infty} (Tq_k)(0) D^k.$$

Q 12. Montrer que deux endomorphismes shift-invariants de $\mathbb{K}[X]$ commutent.

II.C - Dans cette sous-partie, on applique le résultat de la question 11 aux endomorphismes de la partie I.

Q 13. Pour tout $p \in \mathbb{K}[X]$ non nul et $a \in \mathbb{K}$, montrer, à l'aide de la question 11, que

$$p(X+a) = \sum_{k=0}^{\deg(p)} \frac{a^k}{k!} p^{(k)}.$$

où $p^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième du polynôme p. Reconnaitre cette formule.

Q 14. Pour $p \in \mathbb{K}[X]$, exprimer Jp en fonction des dérivées $p^{(k)}$ $(k \in \mathbb{N})$ de p.

Q 15. Pour $p \in \mathbb{K}[X]$, exprimer Lp en fonction des dérivées $p^{(k)}$ $(k \in \mathbb{N})$ de p.

II.D - Dans cette sous-partie, T est un endomorphisme non nul shift-invariant de $\mathbb{K}[X]$.
On rappelle que le degré du polynôme nul est par convention égal à -1 .

Q 16. Montrer qu'il existe un entier naturel $n(T)$ tel que, pour tout polynôme $p \in \mathbb{K}[X]$,

$$\deg(Tp) = \max\{-1, \deg(p) - n(T)\}.$$

Q 17. En déduire $\mathrm{Ker}(T)$ en fonction de $n(T)$.

Q 18. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

$$(1)\ T \text{ est inversible}; \qquad (2)\ T1 \neq 0; \qquad (3)\ \forall p \in \mathbb{K}[X], \deg(Tp) = \deg(p).$$

Q 19. Si ces conditions sont vérifiées, montrer que T^{-1} est encore un endomorphisme shift-invariant.

II.E - Dans cette sous-partie, T est un endomorphisme delta de $\mathbb{K}[X]$.

Q 20. Montrer qu'il existe une suite de scalaires $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\alpha_0 = 0, \alpha_1 \neq 0$ et $T = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \alpha_k D^k$.

Q 21. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme U shift-invariant et inversible tel que $T = D \circ U$. Préciser U dans le cas $T = D$, puis dans le cas $T = L$.

Q 22. Pour tout polynôme $p \in \mathbb{K}[X]$ non nul, vérifier que $\deg(Tp) = \deg(p) - 1$. En déduire $\mathrm{Ker}(T)$ et le spectre de T.

Q 23. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note T_n la restriction de T à $\mathbb{K}_n[X]$. Montrer que T_n est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$. Est-il diagonalisable ?

Q 24. Déterminer $\mathrm{Im}\,(T_n)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$ et en déduire que T est surjectif.

III - Suite de polynômes associée à un endomorphisme delta

On souhaite montrer que, pour tout endomorphisme delta Q, il existe une unique suite de polynômes $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}[X]$ telle que

— $q_0 = 1$;
— $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(q_n) = n$;
— $\forall n \in \mathbb{N}^*, q_n(0) = 0$;
— $\forall n \in \mathbb{N}^*, Qq_n = q_{n-1}$.

Cette suite sera appelée *suite de polynômes associée* à l'endomorphisme delta Q.

III.A - Soit Q un endomorphisme delta.

Q 25. Montrer l'existence et l'unicité de la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes associée à Q.

Q 26. Montrer que, pour tout entier naturel n, $\forall (x, y) \in \mathbb{K}^2, \quad q_n(x + y) = \sum\limits_{k=0}^{n} q_k(x)q_{n-k}(y)$.

III.B - Réciproquement, soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(q_n) = n$ et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{K}^2, \quad q_n(x + y) = \sum_{k=0}^{n} q_k(x)q_{n-k}(y).$$

Q 27. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme delta Q dont $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de polynômes associée.

III.C - Soit Q un endomorphisme delta, soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes associée à Q et soit n un entier naturel.

Q 28. Montrer que la famille $(q_0, q_1, \dots, q_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Q 29. D'après la question 23, Q induit un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ noté Q_n. Donner sa matrice dans la base précédente. En déduire sa trace et son déterminant.