Devoir Surveillé 2

Calculatrices interdites. L'exercice et le problème sont indépendants.

Exercice

On pose φ_0 la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\varphi_0 : t \mapsto e^{-t^2}$$

1) Justifier que φ_0 est intégrable sur $[0,+\infty[$.

On pose pour tout $x \in [0,+\infty[$, $\varphi_1(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$

2) Montrer que φ_1 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et calculer φ_1'.

3) a) Justifier que pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2x}e^{-x^2} - \int_x^{+\infty} \frac{1}{2t^2}e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

b) En utilisant l'intégration des relations de comparaison, montrer que

$$\int_x^{+\infty} \frac{1}{2t^2}e^{-t^2}\mathrm{d}t = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\varphi_1(x)\right)$$

En déduire un équivalent simple de φ_1 quand x tend vers $+\infty$.

c) Justifier que φ_1 est intégrable sur $[0,+\infty[$.

d) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_1(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt\right)\mathrm{d}x$.

On pourra intégrer par parties en utilisant 2.

Problème

Notations et définitions

- Dans tout le problème n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.
- On désigne par $\mathbb{K}$ le corps des nombres réels ou des nombres complexes.
- On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ la $\mathbb{K}$-algèbre des matrices carrées de taille n et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices carrées de taille n inversibles.
- Le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ constitué des matrices diagonales est noté $D_n(\mathbb{K})$.
- L'ensembles des éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui sont de trace nulle est noté $Z_n(\mathbb{K})$.
- Si u est un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$, on rappelle $u^0 = \mathrm{id}$ et que si $k \in \mathbb{N}^*$, $u^k = \underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{k \ fois}$.
- Pour tout $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$, le crochet $[A, B]$ est défini par $[A, B] = AB - BA$.
  Pour tout couple (u, v) d'éléments de $\mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$, le crochet $[u, v]$ est défini par $[u, v] = u \circ v - v \circ u$.
- Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on définit l'endomorphisme :

$$\begin{array}{rccc} \phi_A : & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ & B & \longmapsto & [A, B] = AB - BA \end{array}$$

  Pour tout $u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$, on définit l'endomorphisme :

$$\begin{array}{rccc} \psi_u : & \mathscr{L}(\mathbb{K}^n) & \longrightarrow & \mathscr{L}(\mathbb{K}^n) \\ & v & \longmapsto & [u, v] = u \circ v - v \circ u \end{array}$$

- On pose : $X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie I : résultats préliminaires, exemples

1) a) Montrer que $Z_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$; en préciser la dimension.
   b) Justifier que, pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice $[A, B]$ appartient à $Z_n(\mathbb{K})$.

2) On considère $j : \mathbb{K}^3 \to Z_2(\mathbb{K})$ définie par $j : (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} x & y+z \\ y-z & -x \end{pmatrix}$.

   Montrer que l'application j est un isomorphisme de $\mathbb{K}$ espace vectoriels.

3) a) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. Vérifier que $A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0_{\mathscr{M}_2(K)}$.
   b) En déduire que si u est un endomorphisme de $\mathbb{K}^2$, alors $u^2 - \mathrm{tr}(u)u + \det(u)\mathrm{id} = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{K}^2)}$.

4) Soit A une matrice non nulle de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

   Montrer que si $A^2 = 0$, alors A est semblable à $X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   On pourra utiliser l'endomorphisme u canoniquement associé à A, et chercher à construire une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{K}^2$ dans laquelle la matrice de u est X_0.

Partie II : étude de ψ_v pour $n = 2$

Dans cette partie, on considère u et v deux endomorphismes de $\mathbb{K}^2$ vérifiant la relation

$$\psi_v(u) = [v, u] = v \circ u - u \circ v = u \qquad (\star)$$

5) a) Montrer que $v \circ u^2 - u^2 \circ v = 2\, u^2$.
On pourra composer la relation $(\star)$ par u à gauche, puis réutiliser $(\star)$.

b) Calculer $\mathrm{tr}(u)$ et $\mathrm{tr}(u^2)$. En déduire que $\det(u) = 0$ puis que $u^2 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{K}^2)}$.
On pourra utiliser 3.b).

On suppose dans toute la suite de cette partie que $u \neq 0_{\mathscr{L}(\mathbb{K}^2)}$ et on note $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ une base de $\mathbb{K}^2$ dans laquelle u a pour matrice X_0. L'existence d'une telle base est assurée par la question 4)

6) a) Montrer qu'il existe a et λ dans $\mathbb{K}$ tels que la matrice de v dans la base $\mathscr{B}$ s'écrive : $\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$.

b) Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2)$ de $\mathbb{K}^2$ dans laquelle la matrice de u est X_0 et la matrice de v est $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$.

7) On cherche maintenant à trouver en fonction de u et v tous les $w \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^2)$ vérifiant :

$$\psi_w(u) = w \circ u - u \circ w = u$$

a) Donner la forme de la matrice de w dans la base $\mathscr{B}'$, en déduire l'existence de α et β dans $\mathbb{K}$ tels que $w = v + \alpha \mathrm{id} + \beta u$.

b) Montrer réciproquement que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $v + \alpha \mathrm{id} + \beta u$ est solution.

8) On cherche de même les endomorphismes t solutions de $v \circ t - t \circ v = t$. Donner la forme de la matrice de t dans la base $\mathscr{B}'$, en déduire l'ensemble des solutions en fonction de u.

Partie III : une propriété de ψ_v pour $n \geqslant 2$

Dans cette partie, u et v désignent deux endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ vérifiant $\psi_v(u) = v \circ u - u \circ v = u$. On suppose de plus que u n'est pas nul.

9) Soit $k \in \mathbb{N}$, exprimer $v \circ u^k - u^k \circ v$ en fonction de u et k.
On pourra procéder par récurrence sur k, en remarquant que le cas $k = 2$ a été traité en 5.a).

10) En déduire que tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k \neq 0$, est une valeur propre de ψ_u. En déduire qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $u^r = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{K}^n)}$.

Partie IV : réduction des éléments de $Z_2(\mathbb{K})$

11) Dans cette question, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

a) Soit $A \in Z_2(\mathbb{C}) \cap \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.
Montrer qu'il existe un complexe non nul α tel que $S = \dfrac{A}{\alpha}$ vérifie $S^2 = I_2$ et en déduire que A est semblable à αH_0.
On pourra utiliser 3.a).

b) En déduire que deux éléments de $Z_2(\mathbb{C}) \cap \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ dont les déterminants sont égaux sont semblables.

12) Dans cette question, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

a) Soit $A \in Z_2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. On pose $\beta = \det(A) \neq 0$ et on note u l'endomorphisme canoniquement associé à A.

On suppose $\beta > 0$ et on considère x un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$.

i) Montrer que $(x, u(x))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$.

ii) En déduire qu'il existe une base (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de u est égale à $\begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Déduire de la question précédente que deux éléments de $Z_2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ dont les déterminants sont égaux sont semblables.

On n'oubliera pas de considérer le cas où $\det(A) < 0$.

Partie V : description des triplets admissibles de $Z_2(\mathbb{K})$

• On dit qu'un triplet (X, H, Y) de trois matrices toutes non nulles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est un **triplet admissible** si les trois relations suivantes sont vérifiées :

$$[H, X] = 2X \qquad , \qquad [X, Y] = H \qquad , \qquad [H, Y] = -2Y$$

• On pose : $X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $H_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $Y_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

13) Soient A, B et M trois éléments de $Z_2(\mathbb{K})$

a) Exprimer la trace de M^2 en fonction du déterminant de M.

b) Montrer que $M^2 = 0$ si et seulement si $\mathrm{tr}(M^2) = 0$.

c) On suppose que les matrices A et $[A, B]$ commutent. Démontrer que $([A, B])^2 = 0$ en utilisant les deux questions précédentes.

14) Déterminer les matrices M de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ qui commutent avec X_0. En déduire les matrices M de $Z_2(\mathbb{K})$ qui commutent avec X_0.

15) Soient $A, B, P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec P inversible. Vérifier que $[P^{-1}AP, P^{-1}BP] = P^{-1}[A, B]P$.

16) Soit $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$. Vérifier que $(PX_0P^{-1}, PH_0P^{-1}, PY_0P^{-1})$ est un triplet admissible de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

On se propose de démontrer que tous les triplets admissibles de $Z_2(\mathbb{K})$ sont de cette forme.

17) Pour toute la suite de cette question, on prend X, H, Y trois éléments de $Z_2(\mathbb{K})$ tel que (X, H, Y) forme un triplet admissible.

a) Montrer, en utilisant la question 13) qu'il existe une matrice $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ vérifiant : $X = QX_0Q^{-1}$.

On fixe pour la suite de cette question une telle matrice $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$

b) On pose $H_1 = Q^{-1}HQ$. Que dire de $[H_1, X_0]$?

En calculant $[H_1, X_0]$ à l'aide des coefficients de H_1, prouver l'existence d'un scalaire t tel que : $H_1 = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) Déterminer une matrice $T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ commutant avec X_0 et vérifiant la relation : $H_1 = TH_0T^{-1}$. On pose désormais $P = QT$.

18) On pose $Y_1 = P^{-1}YP$.

a) Pourquoi (X_0, H_0, Y_1) est-il un triplet admissible ?

b) Calculer les matrices $[X_0, Y_1 - Y_0]$ et $[H_0, Y_1 - Y_0]$.

c) En déduire que $Y_1 = Y_0$.

19) Conclure.