Exercice

1) La fonction φ_0 est continue et positive sur $[0,+\infty[$. De plus $t^2e^{-t^2}$ tend vers 0 en $+\infty$ donc φ_0 est négligeable devant $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$. Cette dernière fonction est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc φ_0 est intégrable sur $[0,+\infty[$.

2) Comme $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue, la fonction φ_1 est de classe $\mathscr{C}^1$ et pour tout x dans $[0,+\infty[$,

$$\varphi_1'(x) = -\varphi_0(x) = -e^{-x^2}$$

3) a) Soit $x \in]0,+\infty[$, $\varphi_1(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} \frac{-1}{2t}(-2t).e^{-t^2}\mathrm{d}t$.
On procède par intégration par parties.

$$\varphi_1(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{2t}e^{-t^2}\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{1}{2t^2}e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

En calculant le crochet (qui converge), on obtient que

$$\varphi_1(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2x}e^{-x^2} - \int_x^{+\infty} \frac{1}{2t^2}e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

En particulier, l'intégrale de droite converge.

b) Quand t tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{2t}e^{-t^2}$ est négligeable devant e^{-t^2}. Donc par intégration des relations de comparaisons pour les intégrales des fonctions positives, $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{2t^2}e^{-t^2}\mathrm{d}t$ est négligeable devant $\varphi_1 : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$. De ce fait $\boxed{\varphi_1(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}e^{-x^2}}$.

c) On a vu que φ_1 était de classe $\mathscr{C}^1$. Elle est donc continue sur $[0,+\infty[$ et de plus, $\varphi_1(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}e^{-x^2}$. Or , $x \mapsto \dfrac{1}{2x}e^{-x^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (cela a été vu en 3.a)) donc, par comparaison pour les fonctions positives, φ_1 est intégrable sur $[1,+\infty[$ et donc sur $[0,+\infty[$.

d) On réalise une intégration par parties

$$\int_0^{+\infty} \varphi_1(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} 1.\varphi_1(x)\mathrm{d}x = [x\varphi_1(x)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x\varphi_1'(x)\mathrm{d}x$$

En effet le crochet converge et vaut 0 puisque $\varphi_1(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-x^2}}{2x}$. En utilisant la formule de la dérivée de φ_1 déterminée en 2. on a donc

$$\int_0^{+\infty} \varphi_1(x)dx = \int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

Problème

Partie I : résultats préliminaires, exemples

1) a) L'application trace est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Elle n'est pas identiquement nulle, car $\text{tr}(I_n) = n \neq 0$, et donc son noyau $\text{Ker}(\text{tr}) = Z_n(\mathbb{K})$ est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui est de dimension n^2, ainsi $\boxed{\dim(Z_n(\mathbb{K}) = n^2 - 1}$.

b) Pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\text{tr}([A, B]) = \text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = 0$$

2) • L'application j est bien définie car $j(x, y, z)$ est de trace nulle .
• L'application j est linéaire • Par 1.a), $\dim(Z_2(\mathbb{K})) = 2^2 - 1 = 3 = \dim(\mathbb{K}^3)$; ainsi, j est un isomorphisme si et seulement si $\text{Ker}(j) = \{(0, 0, 0)\}$.

Or $j(x, y, z) = 0_{\mathscr{M}_{n2}(K)} \iff \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ z - y = 0 \\ z + y = 0 \end{array}\right. \iff (x, y, z) = (0, 0, 0)$

3) a) Soit $A \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$;

$$A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)I_2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & cb + d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (a+d)a & (a+d)b \\ (a+d)c & (a+d)d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 + bc - a^2 - ad + ad - bc & (a+d)(b-b) \\ (a+d)(c-c) & cb + d^2 - ad - d^2 + ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Soit A la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. La matrice de $u^2 - \text{tr}(u)u + \det(u)id$ dans la base canonique est $A^2 - \text{tr}(u)A + \det(u)I_2$ or par définition, $\text{tr}(u) = \text{tr}(A)$ et d'autre part $\det(u) = \det(A)$.
On peut conclure en utilisant 3.a)

4) Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A ; on a donc $u^2 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{K}^2)}$ et $u \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{K}^2)}$.
On cherche une base (e_1, e_2) telle que $u(e_1) = 0$ et $u(e_2) = e_1$. En particulier $e_1 \in \text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u)$. Montrons que l'on peut choisir un tel élément.
Comme $u \neq 0$, $\text{Im}(u) \neq \{0\}$. On peut donc choisir un vecteur $e_1 \neq 0$ dans $\text{Im}(u)$. Il existe alors un élément $e_2 \in \mathbb{K}^2$ tel que $u(e_2) = e_1$. On en déduit que $u(e_1) = u^2(e_2) = 0$.
Il suffit donc de vérifier que (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{K}^2$. Soit λ_1, λ_2 tels que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0$, en appliquant u on obtient $\lambda_2 e_1 = 0$ et donc $\lambda_2 = 0$ car $e_1 \neq 0$. Il s'en suit que $\lambda_1 = 0$.
Finalement, on a bien que A est semblable à X_0.

Partie II : étude de ψ_v pour $n = 2$

5) a) On compose la relation $v \circ u - u \circ v = u$ par u à gauche, puis à droite. On obtient les deux relations :

$$\left\{\begin{array}{l} u \circ v \circ u - u^2 \circ v = u^2 \\ v \circ u^2 - u \circ v \circ u = u^2 \end{array}\right.$$

En faisant la somme, on obtient :

$$v \circ u^2 - u^2 \circ v = 2u^2$$

b) On a $\text{tr}(u) = \text{tr}(u \circ v - v \circ u) = \text{tr}(u \circ v) - \text{tr}(v \circ u) = 0$

De même, en utilisant la relation ci-dessus,

$$2\mathrm{tr}(u^2) = \mathrm{tr}(v \circ u^2 - v^2 \circ v) = 0$$

En utilisant 3.b) on en déduit que $u^2 = -\det(u)\mathrm{id}$ puis, en prenant la trace,

$$0 = \mathrm{tr}(u^2) = \det(u)\det(\mathrm{id}) = -\det(u)$$

Finalement $u^2 = 0$.

6) a) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrice de v dans la base $\mathscr{B}$. La relation $v \circ u - u \circ v = u$ donne :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$v \circ u - u \circ v = u \iff (c = 0 \text{ et } d = a-1)$$

En posant $a = \lambda$ et $b = a$, on obtient la forme cherchée.

b) D'après la forme de la matrice obtenue à la question d'avant, on voit que v a deux valeurs propres distinctes (λ et $\lambda - 1$), elle est donc diagonalisable. De plus le vecteur e_1 appartient à $E_\lambda(v)$ et à $E_0(u)$. Posons e_2' un vecteur propre de v pour la valeur propre λ_1. Si on considère la base $\mathscr{C} = (e_1, e_2')$, alors v et u ont pour matrices respectives :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda-1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En effet, pour ce qui est de la matrice de u, on sait que $e_1 \in \mathrm{Ker}(u) = E_0(u)$ et que $\mathrm{tr}(u) = 0$. De plus $\theta \neq 0$ car $u \neq 0$.
On peut alors remplacer e_1 par $e_1' = \theta e_1$ et on vérifie que $\mathscr{B}' = (e_1', e_2')$ convient.

7) a) Par la question 6) a), il existe μ et b dans $\mathbb{K}$ tels que : $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(w) = \begin{pmatrix} \mu & b \\ 0 & \mu-1 \end{pmatrix}$. On voit alors que

$$\begin{pmatrix} \mu & b \\ 0 & \mu-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda-1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (\mu-\lambda)I_2$$

On pose donc $\alpha = \mu - \lambda$ et $\beta = b$.

b) Réciproquement, si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$:

$$(v+\alpha\mathrm{id}+\beta u)\circ u - u \circ (v+\alpha\mathrm{id}+\beta u) = v \circ u - u \circ v\alpha u + \beta u^2 - \alpha u - \beta u^2 = v \circ u - u \circ v = u$$

8) On procède comme ci-dessus. Soit a, b, c, d tels que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(t) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
En écrivant la relation matricielle correspondant à $v \circ t - t \circ v = t$ on en déduit que $a = c = d = 0$ et que b est quelconque. Il existe donc $\gamma \in \mathbb{K}$ tel que $t = \gamma u$.
Réciproquement, s'il existe $\gamma \in \mathbb{K}$ tel que $t = \gamma u$, on a :

$$v \circ t - t \circ v = \mu\,(v \circ u - u \circ v) = \mu u = t$$

Partie III : une propriété de ψ_v pour $n \geqslant 2$

9) D'après la question 5.a), on a : $v \circ u^2 - u^2 \circ v = 2u^2$. Supposons que pour un entier $k \geqslant 2$ la relation $v \circ u^k - u^k \circ v = k\ u^k$ soit vraie ; on compose cette relation par u à gauche : $u \circ v \circ u^k - u^{k+1} \circ v = k\ u^{k+1}$.

Or par hypothèse, $u \circ v = v \circ u - u$, ainsi :

$$(v \circ u - u) \circ u^k - u^{k+1} \circ v = k\ u^{k+1} \iff v \circ u^{k+1} - u^{k+1} - u^{k+1} \circ v = k\ u^{k+1}$$
$$\iff v \circ u^{k+1} - u^{k+1} \circ v = (k+1)\ u^{k+1}.$$

Ainsi, par récurrence, on a montré que : $\boxed{\forall k \geqslant 1,\ v \circ u^k - u^k \circ v = k\ u^k}$.

10) Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k \neq 0$, d'après la question précédente $\psi_v(u^k) = ku^k$ ce qui implique que k est une valeur propre (le vecteur propre associé étant u^k).

Comme ψ_v est un endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$ qui est de dimension finie n^2. Il ne peut pas avoir une infinité de valeurs propres distinctes. Il existe donc $r \in \mathbb{N}$ tel que $u^r = 0$.

Partie IV : réduction des éléments de $Z_2(\mathbb{K})$

11) a) D'après la question 3.a) $A^2 + \det(A)I_2 = 0$ car $\operatorname{tr}(A) = 0$. Soit α une racine carrée dans $\mathbb{C}$ de $-\frac{1}{\det A}$. Alors $S = \frac{A}{\alpha}$ vérifie $S^2 = I_2$.

On voit que S n'est pas égale à I_2 car sinon $0 = \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(\alpha S) = \alpha \operatorname{tr}(S) = 2\alpha$ ce qui est contradictoire. De même $S \neq -I_2$.

Notons s l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice S. Comme $S^2 = I_2$, s est une symétrie différente de $\pm\mathrm{id}$. Posons $F = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{id})$ et $G = \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id})$ les sous-espaces de $\mathbb{C}^2$ tels que s soit la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Etant tous deux non réduits à $\{0\}$ et supplémentaires, ces sous-espaces sont tous deux de dimension 1, donc il existe $f \in F$ et $g \in G$ tous deux non nuls. La famille (f, g) est alors une base de $\mathbb{C}^2$ dans laquelle la matrice de s est H_0. Donc S est semblable à H_0 et A à αH_0.

b) Soient $A, B \in Z_2(\mathbb{C}) \cap GL_2(\mathbb{C})$ des matrices de même déterminant. Notant α une des racines carrées de $-\frac{1}{\det A}$, A et B sont toutes deux semblables à αH_0, donc sont semblables entre elles car la similitude est une relation d'équivalence dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

12) a) i) Soit λ, μ dans $\mathbb{R}$ tels que $\lambda x + \mu u(x) = 0$. En composant par u et en utilisant que $u^2 = -\beta \mathrm{id}$ on obtient que $\lambda u(x) - \mu\beta x = 0$. Par une combinaison linéaire de ces deux équations on obtient $(\lambda^2 + \mu^2\beta)x = 0$ et donc, x étant non nul, $\lambda^2 + \mu^2\beta = 0$. Comme $\beta > 0$, cela implique $\lambda = \mu = 0$.

ii) Il suffit par ce qui précède de prendre $e_1 \in \mathbb{R}^2$ non nul et de poser $e_2 = u(e_1)$ pour obtenir une base du plan $\mathbb{R}^2$. Alors $u(e_2) = u^2(e_1) = -\beta e_1$.

b) Soient $A, B \in Z_2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ de même déterminant. Si ce déterminant est négatif, en procédant comme dans la question 11) A et B sont toutes deux semblables à $\frac{1}{\sqrt{-\det A}} H_0$.

Sinon, elles sont toutes deux semblables à $\begin{pmatrix} 0 & -\det A \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Donc A et B sont semblables.

Partie V : description des triplets admissibles de $Z_2(\mathbb{K})$

13) a) Par la question 3.a), on a $M^2 = -(\det M)I_2$ donc $\operatorname{tr}(M^2) = -2\det M$.

b) Par ce qui précède, $M^2 = 0 \Leftrightarrow \det(M) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tr}(M^2) = 0$.

c) Posons $M = [A, B]$. Alors M est de trace nulle. De plus

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(M^2) &= \operatorname{tr}((AB - BA)[A,B]) = \operatorname{tr}(AB[A,B]) - \operatorname{tr}(BA[A,B]) \\ &= \operatorname{tr}\Big(A(B[A,B])\Big) - \operatorname{tr}\Big((B[A,B])A\Big) = 0\end{aligned}$$

Par la question précédente, $M^2 = 0$.

14) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. On a $[X_0, M] = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d-a \\ 0 & -c \end{pmatrix}$.
M commute donc avec X_0 si et seulement si $c = 0$ et $a = d$ c'est-à-dire M est combinaison linéaire de I_2 et de X_0.
Les matrices de $Z_2(\mathbb{K})$ commutant avec X_0 sont celles de $\mathrm{Vect}(X_0)$.

15) Par bilinéarité du produit matriciel, on a pour toutes matrices $A, B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$:
$[P^{-1}AP, P^{-1}BP] = P^{-1}ABP - P^{-1}BAP = P^{-1}[A, B]P$

16) On en déduit $[P^{-1}H_0P, P^{-1}X_0P] = P^{-1}[H_0, X_0]P$, etc...
Il suffit donc de vérifier que (X_0, H_0, Y_0) est un triplet admissible, ce que le calcul montre aisément.

17) a) X et $[X, H] = -2X$ commutent. Par la question 14, on a $[X, H]^2 = 0$ donc $4X^2 = 0$ et ainsi $X^2 = 0$.
Par la question 4, on en déduit que X est semblable à X_0. D'où l'existence de la matrice Q de l'énoncé.

b) $[H_1, X_0] = Q^{-1}[H, X]Q = Q^{-1}(2X)Q = 2X_0$ Notant $H_1 = \begin{pmatrix} s & t \\ u & -s \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{pmatrix} 0 & s \\ 0 & u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u & -s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où $u = 0$ et $s = 1$.

c) On cherche T sous la forme $\lambda I + \mu X_0$ et inversible, donc avec $\lambda \neq 0$
Si T convient, $\frac{1}{\lambda}T$ convient également donc on peut supposer $\lambda = 1$ et ainsi $T^{-1} = I - \mu X_0$ (car puisque I et X_0 commutent on a :$(I - \mu X_0)(I + \mu X_0) = I^2 - \mu^2 X_0^2 = I$) (on peut aussi utiliser la comatrice).

$$TH_0T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2\mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il suffit de prendre $\mu = -\frac{t}{2}$.

18) a) On a

$$X_0 = T^{-1}X_0T = T^{-1}Q^{-1}XQT = P^{-1}XP$$
$$H_0 = T^{-1}H_1T = T^{-1}Q^{-1}HQT = P^{-1}HP$$
$$Y_1 = P^{-1}YP$$

Par la question 15), on a $[H_0, X_0] = P^{-1}[H, X]P = P^{-1}(2X)P = 2X_0$, $[H_0, Y_1] = P^{-1}[H, Y]P = P^{-1}(-2Y)P = -2Y_1$ et $[X_0, Y_1] = P^{-1}[X, Y]P = P^{-1}HP = H_0$.

b) Comme (X_0, H_0, Y_0) est aussi un triplet admissible,

$$[X_0, Y_1 - Y_0] = [X_0, Y_1] - [X_0, Y_0] = H_0 - H_0 = 0$$

et de même $[H_0, Y_1 - Y_0] = -2(Y_1 - Y_0)$.

c) Par la question précédente, $Y_1 - Y_0$ commute avec X_0 et sa trace est nulle, donc est de la forme μX_0 ($\mu \in \mathbb{K}$) d'après la question 14).
On a donc $[H_0, Y_1 - Y_0] = \mu[H_0, X_0] = 2\mu X_0$.
Ainsi $-2(Y_1 - Y_0) = 2\mu X_0$ donc $Y_1 - Y_0 = -\mu X_0$
Ainsi $\mu X_0 = -\mu X_0$, et comme $X_0 \neq 0$, $\mu = -\mu$ donc $\mu = 0$.
Donc $Y_1 = Y_0$.

19) On a donc $(X, H, Y) = (PX_0P^{-1}, PH_0P^{-1}, PY_1P^{-1}) = (PX_0P^{-1}, PH_0P^{-1}, PY_0P^{-1})$.