Exercice

1) La fonction φ_0 est continue et positive sur $[0,+\infty[$. De plus $t^2e^{-t^2}$ tend vers 0 en $+\infty$ donc φ_0 est négligeable devant $t\mapsto \dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$. Cette dernière fonction est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc φ_0 est intégrable sur $[0,+\infty[$.

2) Comme $t\mapsto e^{-t^2}$ est continue, la fonction φ_1 est de classe $\mathscr{C}^1$ et pour tout x dans $[0,+\infty[$,

$$\varphi_1'(x) = -\varphi_0(x) = -e^{-x^2}$$

3) a) Soit $x\in]0,+\infty[$, $\varphi_1(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty}\frac{-1}{2t}(-2t).e^{-t^2}\mathrm{d}t$.
On procède par intégration par parties.

$$\varphi_1(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{2t}e^{-t^2}\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty}\frac{1}{2t^2}e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

En calculant le crochet (qui converge), on obtient que

$$\varphi_1(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2x}e^{-x^2} - \int_x^{+\infty}\frac{1}{2t^2}e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

En particulier, l'intégrale de droite converge.

b) Quand t tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{2t}e^{-t^2}$ est négligeable devant e^{-t^2}. Donc par intégration des relations de comparaisons pour les intégrales des fonctions positives, $x\mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{1}{2t^2}e^{-t^2}\mathrm{d}t$ est négligeable devant $\varphi_1 : x\mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$. De ce fait $\boxed{\varphi_1(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}e^{-x^2}}$.

c) On a vu que φ_1 était de classe $\mathscr{C}^1$. Elle est donc continue sur $[0,+\infty[$ et de plus, $\varphi_1(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}e^{-x^2}$. Or , $x\mapsto \dfrac{1}{2x}e^{-x^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (cela a été vu en 3.a)) donc, par comparaison pour les fonctions positives, φ_1 est intégrable sur $[1,+\infty[$ et donc sur $[0,+\infty[$.

d) On réalise une intégration par parties

$$\int_0^{+\infty}\varphi_1(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} 1.\varphi_1(x)\mathrm{d}x = [x\varphi_1(x)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x\varphi_1'(x)\mathrm{d}x$$

En effet le crochet converge et vaut 0 puisque $\varphi_1(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-x^2}}{2x}$. En utilisant la formule de la dérivée de φ_1 déterminée en 2. on a donc

$$\int_0^{+\infty}\varphi_1(x)dx = \int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

4) On veut montrer par récurrence que pour tout entier n, il existe des fonctions $(\psi_0,\dots,\psi_n)$ de classe $\mathscr{C}^1$, intégrables sur $[0,+\infty[$ telles que

— $\psi_0 = \varphi_0$

— pour tout $0 \leqslant k < n$, $\psi_{k+1} : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \psi_k(t)\mathrm{d}t$.

— pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, $\psi_k(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(2x)^k} e^{-x^2}$.

On remarque que la propriété est vraie pour $n = 0$ (et aussi pour $n = 1$).
On se donne un entier n et on suppose la propriété vraie pour cet entier et on veut la démontrer pour l'entier $n+1$. On remarque que, comme ψ_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et que $\psi_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(2x)^n} e^{-x^2}$ alors on peut poser

$$\psi_{n+1} : x \mapsto \int_x^{+\infty} \psi_n(t)\mathrm{d}t$$

qui est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$. Il ne reste plus qu'à vérifier la formule pour l'équivalent en $+\infty$. Comme on sait que $\psi_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(2x)^n} e^{-x^2}$ on a, par intégration des relations de comparaisons pour les intégrales convergentes des fonctions positives que

$$\psi_{n+1}(x) = \int_x^{+\infty} \psi_n(t)\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} \frac{1}{(2t)^n} e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

Or, on peut réaliser une intégration par parties sur cette intégrale. Pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}
\int_x^{+\infty} \frac{1}{(2t)^n} e^{-t^2}\mathrm{d}t &= \int_x^{+\infty} \frac{1}{(2t)^{n+1}}(2t)e^{-t^2}\mathrm{d}t \\
&= \left[-\frac{1}{(2t)^{n+1}} e^{-t^2}\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}t^{n+2}} e^{-t^2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{(2x)^{n+1}} e^{-x^2} - \int_x^{+\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}t^{n+2}} e^{-t^2}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Maintenant, comme à la question 3.b), $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}t^{n+2}} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ est négligeable devant $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{(2t)^n} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ d'où $\psi_{n+1}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(2x)^{n+1}} e^{-x^2}$. Ce permet de conclure la récurrence.

Problème

I - Étude d'endomorphismes de $\mathbb{K}[X]$

1) Soit $a \in \mathbb{K}$. Soit $p = \sum_{k=0}^{d} u_k X^k$ où $d \geqslant \deg(p)$,

$$E_a p = p(X+a) = \sum_{k=0}^{d} u_k (X+a)^k = \sum_{k=0}^{d} u_k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{k-i} X^i = \sum_{i=0}^{d} \left(\sum_{k=i}^{d} u_k \binom{k}{i} a^{k-i} \right) X^i \in \mathbb{K}[X]$$

De plus,

$$\forall p, q \in \mathbb{K}[X], \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ E_a(\alpha p+\beta q) = (\alpha p+\beta q)(X+a) = \alpha p(X+a)+\beta q(X+a) = \alpha E_a(p)+\beta E_a(q).$$

Cela montre que E_a est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.
De plus $E_a \circ E_{-a} = E_{-a} \circ E_a = I$ donc E_a est bijective ; c'est un automorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

2) • L'application J est linéaire par linéarité de l'intégrale.
• Pour vérifier que $\mathbb{R}[X]$ est stable par J il suffit alors de vérifier que pour $k \in \mathbb{N}$, $J(X^k) \in \mathbb{R}[X]$.
On a :

$$J(X^k)(x) = \int_x^{x+1} t^k \mathrm{d}t = \frac{1}{k+1}((x+1)^{k+1} - x^{k+1}) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} x^i$$

On en déduit que $J(X^k) \in \mathbb{R}[X]$.

3) L'expression ci-dessus montre que $\deg(J(X^k)) = k$. Soit $p \in \mathbb{R}[X]$ de degré d, qu'on peut écrire $p = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $a_d \neq 0$. On a

$$Jp = \underbrace{a_d J(X^d)}_{\text{de degré } d} + \underbrace{\sum_{k=0}^{d-1} a_k J(X^k)}_{\text{de degré } \leqslant d-1} .$$

Ainsi $\deg(Jp) = d$.
- *Injectivité.* En particulier pour $p \in \mathbb{R}[X]$ on a l'implication :

$$Jp = 0 \Rightarrow \deg(Jp) = -1 \Rightarrow \deg(p) = -1 \Rightarrow p = 0.$$

Donc $\mathrm{Ker}(J) = \{0\}$ et donc J est injective.
- *Surjectivité.* Soit $p \in \mathbb{R}[X]$. Posons $d = \deg(p)$. On vient de voir que $\mathbb{R}_d[X]$ est stable par J, et l'endomorphisme J_d induit par J sur $\mathbb{R}_d[X]$ est injectif (car $\mathrm{Ker}(J_d) = \mathrm{Ker}(J) \cap \mathbb{R}_d[X] = \{0\}$), donc bijectif car $\mathbb{R}_d[X]$ est de dimension finie, donc il existe $q \in \mathbb{R}_d[X]$ tel que $J_d(q) = J(q) = p$.

4) Question classique. Commençons par montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^k \mathrm{d}t$ converge. En effet, pour $k \in \mathbb{N}$, la fonction $f_k : t \mapsto e^{-t} t^k$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $f_k(t) = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, la fonction f_k est intégrable sur $[1, +\infty[$ et donc $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^k \mathrm{d}t$ converge.
Posons alors pour $k \in \mathbb{N}$, $I_k = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^k \mathrm{d}t$
On peut alors réaliser une intégration par parties. Pour $k \in \mathbb{N}$,

$$I_k = \left[e^{-t} \frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{k+1} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{k+1} \mathrm{d}t = \frac{1}{k+1} I_{k+1}$$

puisque le crocher converge et vaut 0 étant donné que $e^{-t} t^{k+1} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
De plus, $I_0 = 1$ et donc, par récurrence immédiate, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_k = k!$.

5) On vérifie aisément que L est linéaire, par linéarité de la dérivation et de l'intégrale.
Pour vérifier que $\mathbb{K}[X]$ est stable par L il suffit de vérifier que pour $k \in \mathbb{N}$, $L(X^k) \in \mathbb{K}[X]$.
On voit que $L(1) : x \mapsto 0 \in \mathbb{K}[X]$.

Pour $k \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
L(X^k)(x) &= -\int_0^{+\infty} e^{-t}k(x+t)^{k-1}\mathrm{d}t \\
&= -k\sum_{i=0}^{k-1}\int_0^{+\infty}\binom{k-1}{i}e^{-t}t^i x^{k-1-i}\mathrm{d}t \\
&= -k\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}i!\; x^{k-1-i} \\
&= -k!\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{(k-1-i)!}\; x^{k-1-i} \\
&= -k!\sum_{j=0}^{k-1}\frac{x^j}{j!} \qquad \text{(changement d'indice).}
\end{aligned}$$

Donc on a bien $L(X^k) \in \mathbb{K}[X]$.
Par contre, L n'est pas inversible : en effet $L(1) = 0$, donc $\mathrm{Ker}(L) \neq \{0\}$.

II - Formule de Taylor pour les endomorphismes shift-invariants de $\mathbb{K}[X]$

6)
- $\forall a \in \mathbb{K}$, $E_a \circ I = I \circ E_a = E_a$.
  De plus $I(X) = X \notin \mathbb{K}^*$ donc I n'est pas un endomorphisme delta.
- $\forall a \in \mathbb{K}$, $\forall p \in \mathbb{K}[X]$, $D \circ E_a(p) = (p(X+a))' = p'(X+a) = E_a \circ D(p)$.
  De plus $D(X) = 1 \in \mathbb{K}^*$ donc D est un endomorphisme delta.
- Soit $b \in \mathbb{K}$. $\forall a \in \mathbb{K}$,
  $$E_a \circ E_b(p) = p((X+b)+a) = p((X+a)+b) = E_b \circ E_a(p)$$
  De plus $E_b(X) = X + b \notin \mathbb{K}^*$ donc E_b n'est pas un endomorphisme delta.
- $\forall a \in \mathbb{K}$, $\forall p \in \mathbb{K}[X]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
  $$J \circ E_a(p)(x) = \int_x^{x+1} p(t+a)\mathrm{d}t \underset{u=t+a}{=} \int_{x+a}^{x+a+1} p(u)\mathrm{d}u = J(p)(x+a) = E_a \circ J(p)(x)$$
  De plus $J(X) = \frac{1}{2}((X+1)^2 - X^2) = X + \frac{1}{2} \notin \mathbb{K}^*$ donc J n'est pas un endomorphisme delta.
- $\forall a \in \mathbb{K}$, $\forall p \in \mathbb{K}[X]$,
  $$L \circ E_a(p)(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-t}p'((x+a)+t)\mathrm{d}t = E_a \circ L(p)(x)$$
  De plus $L(X) = -1 \in \mathbb{K}^*$ donc L est un endomorphisme delta.

7) Vérifions que $(S, +, \cdot, \circ)$ est une sous-algèbre de $(\mathscr{L}(\mathbb{K}[X]), +, \cdot, \circ)$:
- On voit que S est stable par combinaison linéaire : pour $T_1, T_2 \in S$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a :
  $$E_a \circ (\alpha T_A + \beta T_2) = \alpha E_a \circ T_A + \beta E_a \circ T_2 = \alpha T_A \circ E_a + \beta T_2 \circ E_a = (\alpha T_A + \beta T_2) \circ E_a.$$
- On voit que S est stable par $\circ$: pour $T_1, T_2 \in S$, on a :
  $$E_a \circ (T_1 \circ T_2) = T_1 \circ E_a \circ T_2 = (T_1 \circ T_2) \circ E_a.$$

- Enfin $I \in S$ d'après (6).

L'ensemble des endomorphismes delta n'est pas stable par $+$ ni par $\circ$, parce que par exemple $D+(-D)$ et $D \circ D$ ne sont pas des endomorphismes delta.
En effet $(D-D)(X) = 0 \notin \mathbb{K}^*$ et $(D \circ D)(X) = 0 \notin \mathbb{K}^*$.

8) Soit $p \in \mathbb{K}[X]$ et d son degré. On a $D^k p = 0$ pour $k > d$ donc la somme de l'énoncé est une somme finie donc bien définie, et de plus $\sum_{k=0}^{\infty} a_k D^k p = \sum_{k=0}^{d} a_k D^k p$ est un élément de $\mathbb{K}[X]$ en tant que somme de polynômes.

9) Commençons par vérifier que $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k D^k$ est linéaire. Pour p, q dans $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On note d un entier supérieur à $\deg(p)$ et $\deg(q)$. Comme dit ci-dessus,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k(\lambda p+\mu q) = \sum_{k=0}^{d} a_k D^k(\lambda p+\mu q) = \lambda \sum_{k=0}^{d} a_k D^k p+\mu \sum_{k=0}^{d} a_k D^k q = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k p+\mu \sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k q$$

Notons encore d le degré d'un polynôme $p \in \mathbb{K}[X]$. Soit $a \in \mathbb{K}$. Alors en utilisant que $E_a p$ est aussi de degré d et que D et donc toute puissance de D est shift-invariant,

$$\left(\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k D^k\right) \circ E_a\right) p = \left(\left(\sum_{k=0}^{d} a_k D^k\right) \circ E_a\right) p = \left(E_a \circ \left(\sum_{k=0}^{d} a_k D^k\right)\right) p = \left(E_a \circ \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k D^k\right)\right) p$$

10) Supposons $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k D^k$. Évaluée en $p = X^n$ pour n donné, cette égalité donne

$$\sum_{k=0}^{n} a_k D^k(X^n) = \sum_{k=0}^{n} b_k D^k(X^n).$$

Comme chaque terme $D^k(X^n)$ est un monôme de degré $n-k$, le coefficient constant dans cette égalité donne $n! a_n = n! b_n$ donc $a_n = b_n$.

11) L'implication $\Leftarrow$ est immédiate car nous avons vu en (9) que tout endomorphisme de la forme $\sum_{k=0}^{\infty} a_k D^k$ est shift-invariant.
Réciproquement, supposons T shift-invariant et notons $S = \sum_{k=0}^{\infty} (Tq_k)(0) D^k$ qui est aussi shift-invariant. Soit $n \in \mathbb{N}$, on voit que

$$Sq_n = \sum_{k=0}^{\infty} (Tq_k)(0) D^k q_n = \sum_{k=0}^{n} (Tq_k)(0) D^k q_n = Tq_n(0) + \sum_{k=0}^{n-1} (Tq_k)(0) q_{n-k}$$

En évaluant en 0 on obtient que $Sq_n(0) = Tq_n(0)$. Par linéarité, on en déduit que pour tout polynôme p, $Sp(0) = Tp(0)$ car $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ engendre $\mathbb{K}[X]$. Il suffit alors d'utiliser que S et T sont shift-invariant. On en déduit que pour tout $a \in \mathbb{K}$,

$$Sp(a) = (E_a \circ Sp)(0) = (S(E_a p))(0) = T(E_a p))(0) = (E_a \circ Tp)(0) = Tp(a)$$

Les fonctions Sp et Tp sont égales en tant que fonctions polynomiales et donc en tant que polynômes. On a bien $S = T$.

12) Deux endomorphismes shift invariants sont d'après ce qui précède nécessairement de la forme $T_1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k D^k$ et $T_2 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k D^k$, avec (a_k) et (b_k) dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Soit p un polynôme et $d \geqslant \deg(p)$, $T_1 p$ et $T_2 p$ sont de degré inférieurs à d. On en déduit que

$$(T_1 \circ T_2)p = \left(\sum_{n=0}^{d} a_k D^k \circ \sum_{n=0}^{d} b_k D^k\right) p = \left(\sum_{n=0}^{d} b_k D^k \circ \sum_{n=0}^{d} a_k D^k\right) p = (T_2 \circ T_1)(p)$$

13) Le résultat de (11) appliqué à $T = E_a$ donne pour tout $p \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$:

$$p(X+a) = E_a p = \sum_{k=0}^{\deg(p)} E_a q_k(0) D^k p = \sum_{k=0}^{\deg(p)} q_k(a) p^{(k)} = \sum_{k=0}^{\deg(p)} \frac{a^k}{k!} p^{(k)}.$$

On reconnaît la formule de Taylor pour les polynômes.

14) On applique (11) à $T = J$. On a $Jq_k(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^k}{k!}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}\right]_0^1 = \frac{1}{(k+1)!}$, donc pour $p \in \mathbb{K}[X]$:

$$Jp = \sum_{k=0}^{\deg(p)} \frac{1}{(k+1)!} p^{(k)}$$

15) On procède comme dans les questions précédentes avec $T = L$. On a $Tq_0 = 0$, et pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$Lq_k(0) = -\int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\,\mathrm{d}t = -1, \qquad \text{d'après (4).}$$

Ainsi la question (11) donne pour tout $p \in \mathbb{K}[X]$:

$$Lp = -\sum_{k=1}^{+\infty} D^k p.$$

16) On pose $n(T) = \min\{k \in \mathbb{N} \;:\; Tq_k(0) \neq 0\}$. Alors pour $p \in \mathbb{K}[X]$ de degré d,

$$Tp = \sum_{k=n(T)}^{\infty} Tq_k(0) p^{(k)} = \begin{cases} 0, & \text{si } d < n(T) \\ \sum_{k=n(T)}^{d} Tq_k(0) p^{(k)}, & \text{si } d \geqslant n(T). \end{cases}$$

Ainsi

$$\deg(Tp) = \begin{cases} -1, & \text{si } d - n(T) \leqslant -1 \\ d - n(T), & \text{si } d - n(T) > -1, \end{cases}$$

d'où la conclusion voulue.

17) $\ker(T) = \{p \in \mathbb{K}[X] \;:\; \deg(Tp) = -1\} = \mathbb{K}_{n(T)-1}[X]$ d'après la question précédente.

18) • Supposons (i) et montrons (ii).
T étant inversible on a $\ker(T) = \{0\}$ donc $1 \notin \ker(T)$, et donc $T1 \neq 0$.
• Supposons (ii) et montrons (iii).
On a $T1 = \sum_{k=0}^{\deg(1)} Tq_k(0) D^k 1 = Tq_0(0).1 \neq 0$, donc $Tq_0(0) \neq 0$, et donc $n(T) = 0$.
La question (16) donne alors $\forall p \in \mathbb{K}[X],\ \deg(Tp) = \deg(p)$.
• Supposons (iii) et montrons (i).
L'hypothèse donne immédiatement $\ker(T) = \{0\}$: pour $p \neq 0$, on a $\deg(Tp) = \deg(p) \neq -1$ donc $Tp \neq 0$. Ainsi T est injectif.
Il reste à montrer que T est surjectif. Soit $p \in \mathbb{K}[X]$ de degré d. $\mathbb{K}_d[X]$ est stable par T d'après (16), et l'endomorphisme induit par T sur $\mathbb{K}_d[X]$ est injectif donc bijectif car $\mathbb{K}_d[X]$ de dimension finie), donc il existe $q \in \mathbb{K}_d[X] \subset \mathbb{K}_d[X]$ tel que $Tq = p$.

19) Supposons T inversible. Pour $a \in \mathbb{K}$, E_{-a} est également inversible avec $E_{-a}^{-1} = E_a$.
On a donc $E_a \circ T^{-1} = E_{-a}^{-1} \circ T^{-1} = (T \circ E_{-a})^{-1} = (E_{-a} \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ E_a$. Donc T^{-1} est shift-invariant.

20) On sait que T est de la forme $T = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k D^k$ avec $\alpha_k = Tq_k(0)$.
L'égalité de (11) donne $TX = \alpha_0 X + \alpha 1$, donc l'hypothèse $TX \in \mathbb{K}^*$ donne $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_1 \neq 0$.

21) • *Analyse* Soit U un tel endomorphisme. Par la question 11) il existe une suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que $U = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k D^k$. On a alors (dans les notations de la question précédente) $\forall p \in \mathbb{K}[X]$ $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k p^{(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k p^{(k+1)}$ Ainsi $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k D^k = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k D^{k+1}$ donc par la question 10) on a : $\forall k \in \mathbb{N}$ $\beta_k = \alpha_{k+1}$.

• *Synthèse* Posant $U = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{k+1} D^k$ on a pour tout $p \in \mathbb{K}[X]$ $(D \circ U)p = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{k+1} p^{(k+1)}$ donc $D \circ U = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{k+1} D^{k+1} = T$. De plus U est inversible par (18) et car $U1 = \alpha_1 \neq 0$.

• *Exemple 1.* Si $T = D$, c'est immédiat : $T = D \circ I$ donc $U = I$.

• *Exemple 2.* Si $T = L$, comme par la question 15) on a $L = \sum_{k=1}^{\infty} (-D^k)$, on a $U = \sum_{k=0}^{\infty} (-D^k) = L - I$.

22) p est non nul donc $\deg(p) \geqslant 0$. Comme ici $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_1 \neq 0$, on a $n(T) = 1$, et la question (16) donne donc $\deg(Tp) = \deg(p) - 1$.
Par la question 17) on a : $\ker(T) = \mathbb{K}_{1-1}[X] = \mathbb{K}_0[X]$.
On a ainsi $\ker(T) \neq \{0\}$ donc $0 \in Sp(T)$. Par ailleurs pour $\lambda \neq 0$ un polynôme p non nul ne peut pas vérifier $Tp = \lambda p$ puisque $\deg(Tp) = \deg(p) - 1$. Donc aucun scalaire λ non nul n'est valeur propre, et finalement $\mathrm{Sp}(T) = \{0\}$.

23) Nous avons déjà remarqué que $\mathbb{K}_n[X]$ était stable par T, donc la restriction de T à $\mathbb{K}_n[X]$ définit un endomorphisme T_n de $\mathbb{K}_n[X]$.
On sait que 0 est la seule valeur propre de T et que $\ker(T - 0.I) = \mathbb{K}_0[X]$. Donc T_n est diagonalisable si et seulement si $K_n[X] \subset K_0[X]$, c'est-à-dire si et seulement si $n = 0$.

24) La question (22) donne $\mathrm{Im}(T_n) \subset \mathbb{K}_{n-1}[X]$. Par ailleurs

$$\mathrm{Ker}(T_n) = \mathrm{Ker}(T) \cap \mathbb{K}_n[X] = \mathbb{K}_0[X],$$

donc le théorème du rang donne $\dim(\mathrm{Im}(T_n)) = (n+1)-1 = \dim(\mathbb{K}_{n-1}[X])$. Ainsi par inclusion et égalité des dimensions on a $\mathrm{Im}(T_n) = \mathbb{K}_{n-1}[X]$.
Soit $p \in \mathbb{K}[X]$ de degré d. On a $p \in \mathrm{Im}(T_{d+1})$ donc il existe $q \in \mathbb{K}_{d+1}[X]$ (et donc dans $\mathbb{K}[X]$) tel que $T_{d+1}(q) = T(q) = p$. Donc T est bien surjective.

III - Suite de polynômes associée à un endomorphisme delta

25) q_0 est évidemment déterminé de manière unique par $q_0 = 1$.
Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $q_0, \dots, q_{n-1}$ existent et sont uniques, et montrons qu'il existe un unique $r \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$\deg(r) = n, \quad r(0) = 0, \quad Qr = q_{n-1}$$

(ce polynôme pourra alors être noté q_n).
Comme $\deg(q_{n-1}) = n - 1$, (24) donne l'existence de $r_0 \in \mathbb{K}[X]$ de degré n tel que $Qr_0 = q_{n-1}$.
Ensuite comme $\ker(Q) = \mathbb{K}_0[X]$ les solutions de l'équation $Qr = q_{n-1}$ sont les polynômes de la forme $r = r_0 + \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$. On a $r(0) = 0 \Leftrightarrow \alpha = -r_0(0)$. donc le polynôme $r = r_0 - r_0(0)$ est l'unique élément de $\mathbb{K}[X]$ vérifiant $Qr = q_{n-1}$ et $r(0) = 0$, et on a bien $\deg(r) = \deg(r_0) = n$.

26) On procède par récurrence. La propriété est évidente pour $n = 0$ car $1 = 1.1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la propriété soit vraie au rang n.
Fixons $y \in \mathbb{K}$.
On a par hypothèse de récurrence : $E_y Q q_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} q_{n-k}(y) Q q_{k+1}$. De plus $E_y Q = Q E_y$.

Ainsi $Q(E_y q_{n+1} - \sum_{k=0}^n q_{n-k}(y)q_{k+1}) = 0$ donc $E_y q_{n+1} - \sum_{k=0}^n q_{n-k}(y)q_{k+1} \in \ker(Q) = \mathbb{K}_0[X]$ (par (22)).
Il existe donc $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $E_y q_{n+1} - \sum_{k=0}^n q_{n-k}(y)q_{k+1} = \alpha$.
Evaluant en 0, il vient : $q_{n+1}(0+y) - \sum_{k=0}^n q_{n-k}(y).0 = \alpha$ donc $\alpha = q_{n+1}(y)$.
Ainsi

$$q_{n+1}(X+y) - \sum_{k=0}^{n} q_{n-k}(y)q_{k+1} = q_{n+1}(y) = q_{n+1}(y)q_0$$

et donc

$$q_{n+1}(X+y) = \sum_{k=-1}^{n} q_{n-k}(y)q_{k+1} = \sum_{k=-0}^{n+1} q_{n+1-k}(y)q_k$$

Ceci pour tout $y \in \mathbb{K}$, donc

$$\forall x, y \in \mathbb{K} \quad q_{n+1}(x+y) = \sum_{k=-0}^{n+1} q_{n+1-k}(y)q_k(x)$$

27) • *Analyse* Remarquons que si Q est un endomorphisme delta alors $Q(q_0) = 0$ car $\ker Q = \mathbb{K}_0[X]$.
Comme $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ (car $\forall n \in \mathbb{N} \quad deg(q_n) = n$) il existe un unique endomorphisme $Q \in \mathcal{L})(\mathbb{K}[\mathcal{X}$ tel que $Q(q_0) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*\ Q(q_n) = q_{n-1}$
• *Synthèse* Soit Q l'endomorphisme défini ci-dessus.
Comme q_1 est de degré 1, il existe $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tel que $X = \alpha q_1$ et on a $QX = \alpha q_0 \in K^*$ car $deg(q_0) = 1$.
Vérifions que Q est shift-invariant.
Soit $y \in \mathbb{K}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
E_y Q q_{n+1} &= E_y q_n = \sum_{k=0}^{n} q_{n-k}(y)q_k = \sum_{k=0}^{n} q_{n-k}(y)Qq_{k+1} = Q(\sum_{k=0}^{n} q_{n-k}(y)q_{k+1}) \\
&= Q(\sum_{k=-1}^{n} q_{n-k}(y)q_{k+1}) - Q(q_{n+1}(y)q_0) = Q(q_{n+1}(X+y)) - 0 = QE_y q_{n+1}
\end{aligned}$$

et $E_y Q q_0 = E_y 0 = 0 = Q0 = QE_y q_0$.
Comme $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ engendre $\mathbb{K}[X]$ (on montre par récurrence sur n que tout polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ est combinaison linéaire de $(q_0, \ldots, q_n)$, l'hérédité résultant d'une division euclidienne par q_n) et Q est linéaire, $E_y Q = QE_y$, cqfd.

28) $(q_0, \ldots, q_n)$ engendre $\mathbb{K}_n[X]$ (cf question précédente) et son cardinal est $n+1 = dim(\mathbb{K}_n[X])$ donc c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$

29) Les relations $Qq_0 = 0$ et $Qq_k = q_{k-1}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$ donnent la matrice M de Q_n dans la base $(q_0, \ldots, q_n)$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent $\mathrm{tr}(Q_n) = \mathrm{tr}(M) = 0$, $\det(Q_n) = \det(M) = 0$.