Exercice I

On note $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
Pour toute fonction $f \in E$, on pose

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

On note H l'ensemble des fonctions f de E telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
Soit $f \in H$ on appelle $T(f)$ la fonction définie de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ par

$$T(f) : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}f(3x) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{3}[\\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ \frac{1}{2}(1 + f(3x-2)) & \text{si } x \in]\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

1) Montrer que $T : f \mapsto T(f)$ définie bien une application de H dans H.
2) Montrer que pour f, g dans H, $\|T(f) - T(g)\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}\|f - g\|_\infty$.

On construit une suite de fonctions $(g_n)_{n\geqslant 0} \in H^{\mathbb{N}}$ en posant $g_0 : x \mapsto x$ et, pour tout entier naturel n, $g_{n+1} = T(g_n)$.

3) Tracer les fonctions g_0, g_1 et g_2.
4) Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement. On note par la suite g la limite de cette suite.
   On pourra pour $x \in [0,1]$, on pourra faire intervenir la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} g_{k+1}(x) - g_k(x)$.
5) Montrer que la fonction g appartient à H.

On considère $h_0 : x \mapsto \frac{1}{3}x$ et $h_1 : x \mapsto 1 + \frac{1}{3}(x-1)$. Ce sont les homothéties de la droite de rapport $\frac{1}{3}$ et de centres 0 et 1.
On construit alors les ensembles $K_0, K_1, \dots$ en posant $K_0 = [0,1]$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$K_{n+1} = h_0(K_n) \cup h_1(K_n)$$

On note aussi $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$.
Pour tout entier n, on note alors U_n le complémentaire de K_n dans $[0,1]$ et $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ le complémentaire de K dans $[0,1]$.

6) Décrire K_1 et K_2.
7) Justifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, U_n est une union d'un nombre fini d'intervalles ouverts. En déduire que pour tout $x \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\in U$.
8) Montrer que la restriction de g à U est dérivable et que de plus, pour tout $x \in U$, $g'(x) = 0$.

Exercice II

Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions définies sur $[-1,1]$ par

$$f_n(t) = \frac{1}{n} t^n \sin(nt)$$

1) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $]-1,1[$.

2) Soit $a \in]0,1[$.

   a) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n'$ converge normalement sur $[-a,a]$.

   b) En déduire que la fonction $f = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$ et montrer que :

$$\forall t \in]-1,1[,\ f'(t) = \frac{\sin t + t\cos t - t^2}{1 - 2t\cos t + t^2}.$$

   c) Montrer que $f(t) = \arctan\left(\dfrac{t\sin t}{1 - t\cos t}\right)$ pour $t \in]-1,1[$.

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [-1,1]$, $A_n(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} t^k \sin(kt)$.

   a) Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [-1,1]$ on ait $|A_n(t)| \leqslant M$.
   On cherche juste l'existence de M, on ne cherchera pas à calculer une valeur explicite.

   b) Montrer en écrivant $t^k \sin(kt) = A_k(t) - A_{k-1}(t)$ que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{t^k \sin kt}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k(t)}{k(k+1)} + \frac{A_n(t)}{n}$$

   c) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $[-1,1]$ et que $f(t) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{A_k(t)}{k(k+1)}$ sur $[-1,1]$. Montrer que f est continue sur cet intervalle.

   d) En déduire les valeurs de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin n}{n}$ et de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n \sin n}{n}$.